



**Rui Carlos Rodrigues Fernandes Gonçalves**

Licenciado em Engenharia Civil

## **Robustez de estruturas de betão armado sujeitas a deterioração**

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil - Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Doutor Luís Armando Canhoto Neves

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Manuel Pinho Ramos  
Arguente: Prof. Doutor Mário Burguete Botelho Cardoso  
Vogal: Prof. Doutor Luís Armando Canhoto Neves



“Copyright” Rui Carlos Rodrigues Fernandes Gonçalves, FCT/UNL E UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Deseja o autor expressar os seus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de algum modo contribuíram para a realização da presente dissertação, em especial:

- ao Professor Luís Canhoto Neves e ao Engenheiro Eduardo Soares Cavaco pelo interesse e disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho;
- a todos os colegas e amigos pela amizade, incentivo e boa disposição ao longo deste trabalho.

Para terminar, não pode o autor deixar de expressar a profunda gratidão à sua família. Particularmente aos seus pais, avôs, irmãos, sobrinhos e, de modo especial à Patricia, pelo incentivo e apoio que neles sempre encontrou.



# Resumo

A corrosão é uma das principais causas da deterioração de estruturas de betão armado e, talvez, a que envolve os maiores riscos para a segurança estrutural. Assim sendo, existe uma grande necessidade de avaliar a capacidade resistente de uma estrutura de betão armado danificada pela corrosão.

Este trabalho tem como objectivo apresentar um modelo analítico que avalie a capacidade resistente de uma estrutura ou elemento de betão armado considerando o efeito da corrosão. O dano provocado pela corrosão no betão armado é considerado no modelo pela diminuição da secção transversal das armaduras e, pela perda da força de ligação entre o betão e o aço, dependendo do nível de corrosão.

Combinando o modelo desenvolvido com métodos de fiabilidade é realizada uma análise de segurança estrutural de dois exemplos práticos, resultando no cálculo da probabilidade de rotura e do índice de fiabilidade para diferentes níveis de corrosão. Considerando a enorme incerteza que existe nos parâmetros que influenciam a corrosão, assume-se que esta não pode ser prevista, sendo tratada como uma acção imprevisível de acordo com metodologias de robustez estrutural.

**Palavras-Chave:** Corrosão, Corrosão nas armaduras, Força de aderência, Relação constitutiva, Monte Carlo, Probabilidade de rotura, Fiabilidade estrutural, Robustez.





# Abstract

Corrosion of reinforced concrete (RC) structures is one of the main cause of deterioration and perhaps, the one that present greatest risk to the structural safety. Therefore there is a great need to evaluate the resistance of a reinforced concrete structure already damaged by corrosion.

This work aims to present an analytical model to evaluate the resistance of a RC structure damaged by corrosion. The damage caused by reinforcement corrosion is considered in the model by the decreasing of the cross-section area of rebar, and by the decreasing of bond strength between concrete and his reinforcement.

The referred model combined with a Monte Carlo simulation is then used to compute the failure probability and the reliability index of two practical examples for different corrosion levels. Given the enormous uncertainty in the parameters that influence the corrosion, it is assumed that this can not be predicted, therefore it is treated as an unpredictable action in accordance with robustness methodologies.

**Keywords:** Corrosion, bond strength, constitutive relation, Monte Carlo, failure probability, reliability index, robustness.



# Simbologia

$A_0$  - área inicial da secção transversal de uma armadura para betão armado

$A_c$  - área da secção de betão comprimido

$A_{ef}$  - área efectiva da secção transversal de uma armadura para betão armado

$A_s$  - área da secção transversal de uma armadura para betão armado

$A_s$  - área da armadura inferior de uma secção transversal

$A_{s2}$  - área da armadura superior de uma secção transversal

$b$  - largura total de uma secção transversal

$CoV[x]$  - coeficiente de variação

$d$  - altura útil de uma secção transversal

$d_2$  - altura útil da armadura superior de uma secção transversal

$E_{cm}$  - módulo de elasticidade secante do betão;

$E_s$  - valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de uma armadura para betão armado

$F_c$  - valor da força de compressão do betão

$F_s$  - valor da força de compressão/tracção da armadura inferior

$F_{s2}$  - valor da força de compressão/tracção da armadura superior

$F_n(x)$  - função de distribuição da amostra

$F_t$  - valor da força de tracção do betão

$F_x(x)$  - função de distribuição acumulada

$F(x)$  - função de distribuição teórica

$F_{xj}^{-1}$  - inversa da função de distribuição cumulativa

$f_c$  - tensão de rotura do betão à compressão

$f_{cm}$  - tensão média de rotura do betão à compressão

$f_y$  - tensão de cedência do aço

$f_x(x)$  - função densidade de probabilidade conjunta

$g$  - peso próprio

$g(x)$  - função estado limite

$h$  - Altura total de uma secção transversal

$K$  - número de variáveis aleatórias

$K$  - coeficiente

$L$  - comprimento; vão

$LN$  - altura da linha neutra de uma secção transversal

$N$  - número de realizações

$N$  - esforço normal

$M$  - momento flector

$M$  - margem de segurança

$M_R$  - momento resistente

$M_S$  - momento actuante

$m_i$  - momento de ordem  $i$  de uma variável aleatória

$P_f$  - probabilidade de rotura

$P$  - carga imposta na estrutura

$q_{lt}$  - carga permanente

$q_{st}$  - sobre-carga

$R$  - resistência estrutural

$R_d$  - índice de robustez

$Rec$  - recobrimento

$R(X_p)$  - valor da resistência de união normalizado em função do nível de corrosão

$S$  - caracterização das solicitações

$S_{ij}$  - matriz que representa o plano de amostragem base

$Var[x]$  - variância

$X_p$  - nível de corrosão

$y$  - distância da fibra (betão e aço) ao centro de gravidade da secção.

$\alpha$  - nível de significância

$\beta$  - índice de fiabilidade

$\chi$  - curvatura

$\gamma_{con}$  - densidade do betão

$\varepsilon_c$  - extensão do betão à compressão

$\varepsilon_{c1}$  - extensão do betão à compressão correspondente à tensão máxima  $f_c$

$\varepsilon_{cu1}$  - extensão última do betão à compressão

$\varepsilon_s$  - extensão do aço à compressão/tracção

$\varepsilon_s$  - extensão do aço da armadura inferior à compressão/tracção

$\varepsilon_{s2}$  - extensão do aço da armadura superior à compressão/tracção

$\varepsilon_t$  - extensão do betão à tracção

$\theta_E$  - coeficiente de incerteza do efeito de cargas

$\theta_R$  - coeficiente de incerteza da resistência

$\mu(x)$  - valor médio de uma variável aleatória continua; média

$\sigma_c$  - tensão de compressão no betão

$\sigma_s$  - tensão de cedência do aço

$\sigma_y^d$  - tensão de cedência do aço

$\sigma_y^f$  - tensão de cedência do aço considerando a perda de aderência

$\sigma_{adh}^f$  - limite da força de ligação

$\sigma(x)$  - desvio padrão de uma variável aleatória continua



# Conteúdo

	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Simbologia	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
1.1 Aspectos Gerais . . . . .	3
1.2 Objectivos e Estruturação . . . . .	4
<b>2 Segurança estrutural</b>	<b>5</b>
2.1 Aspectos gerais . . . . .	5
2.2 Métodos de análise de segurança estrutural . . . . .	6
2.3 Análise probabilística . . . . .	6
2.3.1 Aspectos gerais . . . . .	6
2.3.2 Conceito de probabilidade . . . . .	7
2.3.3 Variáveis aleatórias . . . . .	7
2.4 Fiabilidade . . . . .	10
2.4.1 Níveis de Segurança . . . . .	12
2.4.2 Métodos de Cálculo da Probabilidade de Rotura . . . . .	14
2.4.3 Método de Fiabilidade do Segundo Momento . . . . .	14
2.4.4 Métodos de simulação (Monte Carlo) . . . . .	17
2.4.5 Técnicas de redução da variância (Latin hypercube sampling (LHS)) . . . . .	19
2.4.6 Determinação da Distribuição de Probabilidade . . . . .	22
2.4.7 Implementação da simulação . . . . .	24
2.5 Robustez . . . . .	25

2.5.1	Aspectos Gerais . . . . .	25
2.5.2	Termos relacionados com a robustez . . . . .	26
2.5.3	Quantificação da robustez . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Corrosão</b>	<b>31</b>
3.1	Corrosão no betão armado . . . . .	31
3.1.1	Aspectos gerais . . . . .	31
3.1.2	Efeitos da corrosão na força de ligação betão/armadura . . . . .	33
3.1.3	Modelos de cálculo . . . . .	34
3.2	Conceitos fundamentais . . . . .	37
3.2.1	Tensão de adesão betão/aço . . . . .	37
3.2.2	Mecanismo de ligação . . . . .	38
3.2.3	Factores que afectam o vínculo de ligação . . . . .	38
3.2.4	Investigações experimentais do comportamento da força de ligação	39
<b>4</b>	<b>Modelação de um elemento de betão armado</b>	<b>41</b>
4.1	Análise da secção transversal . . . . .	41
4.1.1	Aspectos gerais . . . . .	41
4.1.2	Relações constitutivas . . . . .	41
4.1.3	Determinação da capacidade resistente à flexão simples de uma secção transversal . . . . .	45
4.2	Análise da secção transversal de um elemento de betão armado com corrosão . . . . .	52
4.2.1	Aspectos gerais . . . . .	52
4.2.2	Determinação da capacidade resistente de uma secção de betão armado com corrosão . . . . .	52
4.2.3	Resultados . . . . .	53
4.3	Implementação . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Análise da segurança estrutural</b>	<b>57</b>
5.1	Aspectos gerais . . . . .	57
5.2	Análise de segurança de uma laje de betão armado . . . . .	57
5.2.1	Descrição da estrutura . . . . .	57
5.2.2	Análise de fiabilidade Estrutural . . . . .	61
5.2.3	Robustez estrutural . . . . .	65
5.2.4	Resultados . . . . .	66
5.3	Análise de segurança de uma viga de betão armado . . . . .	70
5.3.1	Caracterização da estrutura . . . . .	70



5.3.2	Fiabilidade e Robustez Estrutural . . . . .	72
5.3.3	Resultados . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>79</b>
6.1	Considerações finais . . . . .	79
6.2	Sugestões para futuras pesquisas . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Anexos</b>	<b>87</b>



# Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica das funções probabilísticas . . . . .	8
2.2	Zona de rotura resultante da sobreposição das funções de densidade de probabilidade [Faber, 2007] . . . . .	11
2.3	Ilustração bidimensional do procedimento de aproximação FORM (adaptado de Faber, 2007) . . . . .	16
2.4	Latin cube, duas variáveis e cinco realizações. A matriz $5 \times 2$ (a) determina o plano ilustrado em (b) (adaptado de Olsson et al., 2003) . . . .	20
2.5	Amostragem com correlação espúria (a) e sem correlação espúria (b) . .	22
2.6	Estatística do teste K-S . . . . .	23
2.7	Ronan Point, Londres 1968 (adaptado de Cavaco, 2009) . . . . .	25
2.8	World Trade Center, Nova Iorque 2001 (adaptado de Cavaco, 2009) . .	25
2.9	Resposta estrutural normalizada como função do dano normalizado . .	29
3.1	Efeito da corrosão na capacidade resistente de uma estrutura de betão armado (adoptado de Fib, 2000) . . . . .	32
3.2	Variação da força de ligação com corrosão (adaptado de Fib, 2000) . . .	33
3.3	Modelo de perda de aderência (adoptado de Oliver et al., 2008) . . . .	35
3.4	Composição do modelo de perda de aderência . . . . .	35
3.5	Resistência de união normalizada expressa em relação ao nível de corrosão (adaptado de Cavaco, 2009) . . . . .	36
3.6	Mecanismo de ligação (adoptado de Rteil, 2007) . . . . .	38
4.1	Relação Constitutiva do betão . . . . .	43
4.2	Relação Constitutiva do aço . . . . .	44
4.3	Forças actuantes na viga . . . . .	45
4.4	Distribuição de extensões . . . . .	46
4.5	Diagrama Momento Resistente-Curvatura . . . . .	48
4.6	Tensões presentes na fase não fendilhada . . . . .	49
4.7	Tensões presentes na fase de serviço . . . . .	50
4.8	Tensões presentes na fase de rotura . . . . .	51

4.9	Relação constitutiva do aço com 5 níveis de corrosão . . . . .	54
4.10	Momento resistente Vs Nível de corrosão (%) . . . . .	55
4.11	Momento resistente Vs Curvatura, com varios niveis de corrosão . . . . .	55
4.12	Fluxograma do cálculo do Momento Resistente . . . . .	56
5.1	Vão de uma laje simplesmente apoiada e a sua secção transversal . . . . .	58
5.2	Fluxograma do algoritmo de Monte Carlo . . . . .	61
5.3	Histograma do Momento Resistente para um nível de corrosão de 0% . . . . .	64
5.4	Normalização dos parâmetros $\beta$ e $X_p$ . . . . .	65
5.5	Momento Resistente vs Nível de Corrosão . . . . .	66
5.6	Probabilidade de Rotura vs Nível de Corrosão (%) . . . . .	68
5.7	Índice de Fiabilidade Estrutural ( $\beta$ ) vs Nível de Corrosão (%) . . . . .	68
5.8	Viga de betão armado simplesmente apoiada e a sua secção transversal . . . . .	70
5.9	Probabilidade de Rotura vs Nível de Corrosão . . . . .	74
5.10	Índice de Fiabilidade $\beta$ vs Nível de Corrosão (%) . . . . .	75
5.11	Performance Normalizada vs Dano Normalizado . . . . .	75
5.12	Índice de Robustez para vários níveis de armadura . . . . .	76
5.13	Efeito dos modelos utilizados na simulação da corrosão na capacidade resistente de um elemento de betão armado . . . . .	78

# Lista de Tabelas

2.1	Funções de distribuição de probabilidade . . . . .	10
2.2	Valores mínimos recomendados do índice de fiabilidade (Eurocódigo 0)	13
2.3	Valores mínimos recomendados para o índice de fiabilidade (JCSS) . . .	13
2.4	Relação entre o índice de fiabilidade $\beta$ e a probabilidade de rotura $P_f$ [Vrouwenvelder, 2001] . . . . .	15
2.5	Limiares de significância para $D_n$ . . . . .	23
4.1	Características da viga (Dimensões) . . . . .	48
4.2	Características da viga (Materiais) . . . . .	48
5.1	Tensões de cedência do betão e aço . . . . .	58
5.2	Classes de resistência do betão (adoptado do Eurocódigo 2) . . . . .	59
5.3	Características da laje . . . . .	59
5.4	Peso próprio e sobrecargas . . . . .	60
5.5	Coefficientes de incertezas . . . . .	61
5.6	Probabilidade de Rotura e índice de fiabilidade . . . . .	62
5.7	Exemplo de média e desvio padrão para um rácio de 0.20 e para alguns níveis de corrosão . . . . .	63
5.8	K-S Teste para a variável $M_r$ . . . . .	64
5.9	Parâmetros das variáveis aleatórias dos materiais . . . . .	71
5.10	Peso próprio e sobrecargas . . . . .	71
5.11	Coefficientes de incertezas . . . . .	72
5.12	K-S Teste para a variável $M_r$ . . . . .	73
7.1	Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.20 . . . . .	87
7.2	Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.35 . . . . .	90
7.3	Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.50 . . . . .	93

7.4	Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a viga . . . . .	96
-----	---	----

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Aspectos Gerais

O betão armado foi o material estrutural mais importante nas construções da segunda metade do século XX. O betão chegou a ser considerado durante muito tempo como um material praticamente eterno [Polito, 2006].

No final do século XX, as estruturas de betão armado começaram a apresentar manifestações de deterioração. Esta deterioração comprometia o aspecto estético e, na maioria dos casos afectava a capacidade resistente da estrutura.

Perante este facto, cada vez mais existe a necessidade de se reabilitarem estruturas de betão armado. Nesse sentido, é necessário desenvolver métodos fiáveis de avaliação da capacidade de carga e da vida útil de uma estrutura deteriorada, de modo a obter uma manutenção eficaz e optimizada [Lundgren et al., 2010].

Mais de 50% dos custos de construção são dispendidos com a reparação e reabilitação das estruturas, onde a corrosão das armaduras é a causa de degradação em mais de 95% dos casos e, talvez, a que envolve maiores risco à segurança estrutural [Salta, 2007]. O betão apresenta boas condições de protecção ao aço contra a corrosão mas este é atacado, por substâncias agressivas que o fazem perder tais características, sendo os principais agentes agressivos o dióxido de carbono e os cloretos. Estes causam a carbonatação do betão e consequentemente a queda do seu pH, causam a quebra da película passivante e aumentam a condutividade química do betão.

A corrosão das armaduras tem duas principais consequências, a perda de aderência entre os materiais (betão e aço) e a redução da área efectiva do aço [Lundgren et al., 2010]. Esta perda de aderência entre o betão e o aço interrompe o mecanismo de transferência de tensões, resultando num aumento de deformações e fendilhação. Estes factores contribuem para a diminuição da capacidade resistente de um elemento de betão armado,

podendo resultar no colapso estrutural.

## 1.2 Objectivos e Estruturação

Na presente dissertação propõe-se desenvolver um algoritmo que pretende prever a capacidade resistente de um elemento de betão armado danificado pela presença de corrosão. Este modelo tem em conta a não linearidade física dos materiais. Também se pretende desenvolver um estudo probabilístico baseado no método de Monte Carlo onde se irá quantificar a fiabilidade estrutural e a robustez de um elemento de betão armado num estado não corroído até a um estado totalmente corroído.

Esta dissertação é dividida em seis capítulos.

No primeiro capítulo é introduzido o tema da dissertação, e descrevem-se os principais objectivos.

No segundo capítulo, são estudados os métodos de análise probabilística de segurança estrutural e é apresentado um estudo resumido sobre a fiabilidade e a robustez estrutural.

No terceiro capítulo é analisada a corrosão em armaduras e a força de ligação entre o betão e as armaduras. Também, neste capítulo são apresentados os mecanismos de corrosão nas armaduras utilizados para a sua simulação.

No quarto capítulo define-se um modelo que permite a análise do comportamento estrutural de uma secção de betão armado com e sem a presença de corrosão, tendo em consideração o comportamento físico não linear dos materiais.

No quinto capítulo é analisada a segurança estrutural de uma laje e uma viga de betão armado corroído, utilizando os métodos apresentados nos capítulos anteriores.

No último capítulo são apresentadas as considerações finais.



# Capítulo 2

## Segurança estrutural

### 2.1 Aspectos gerais

A sociedade espera que as suas habitações, edifícios, obras de arte e, em geral, todo o tipo de estruturas utilizadas, sejam seguras e que a rotura ou colapso destas sejam uma raridade. Mas hoje em dia existe uma consciencialização de que muitas causas podem contribuir para a redução da vida útil de uma estrutura, como a falta de qualidade na construção, a utilização de normas e de critérios de projecto errados, o agravamento das cargas a que a estrutura está sujeita, entre outros [Neves, 2001]. A segurança de qualquer sistema estrutural também depende de diversos factores, onde a maioria dos quais apenas podem ser estimados, pois estão associados a significativa incerteza. Estas incertezas conduzem a que o problema de segurança estrutural tenha um carácter não determinístico.

Associada a esta noção surgiu a necessidade de se desenvolver um conceito de segurança sob uma perspectiva probabilística. Desta forma surgiu o conceito de probabilidade de rotura [Henriques, 1998], ou seja, a probabilidade de um dos requisitos definidos no dimensionamento não ser cumprido ao longo da vida útil da estrutura.

Para se poder quantificar a segurança estrutural foram desenvolvidos os conceitos de fiabilidade estrutural e de robustez estrutural. O primeiro mede a capacidade que a estrutura têm em verificar os requisitos especificados para a qual foi projectada durante a sua vida útil [Caldeira, 2007] e o segundo mede a capacidade em que uma estrutura têm em sustentar um dano inesperado, como explosão, impacto, degradação extrema, etc., sem consequências desproporcionadas.

## 2.2 Métodos de análise de segurança estrutural

Segundo Neves e Cruz (2001) os métodos de análise da segurança estrutural podem dividir-se em quatro níveis:

1. Determinísticos - A incerteza da variabilidade das resistências e das acções é considerada num único coeficiente de segurança, que torna este tipo de análise desajustado, pois o coeficiente global de segurança depende da comparação das grandezas e dos referenciais utilizados;
2. Semi-probabilísticos - Usam um coeficiente parcial de segurança para acções e resistências, sendo estas caracterizadas por valores médios ou característicos. A utilização deste método torna-se complexa quando se pretende analisar estruturas com comportamentos não lineares e avaliar a segurança de estruturas existentes;
3. Probabilísticos simplificados - As variáveis são definidas pela sua média e desvio padrão. Neste tipo de análise é definido uma função estado limite, onde a segurança é definida através da probabilidade desta função ser ou não infringida;
4. Puramente probabilístico - Considera-se uma distribuição conjunta de probabilidade de todas as variáveis. As variáveis aleatórias são definidas por distribuições estatísticas com base em observações, o que torna este tipo de análise de difícil implementação.

## 2.3 Análise probabilística

### 2.3.1 Aspectos gerais

A segurança estrutural pode, usando os métodos probabilísticos simplificados e puramente probabilísticos, ser traduzida pelo cálculo da probabilidade de falha/rotura.

Uma parte importante para qualquer análise de estruturas de engenharia é calcular as probabilidades de falha/rotura ou de algum desempenho estrutural inaceitável. A rotura de um elemento estrutural pode ser descrita pela relação entre o valor do efeito das acções (S) e o valor das resistências (R). Se o valor das resistências (R) supera ou iguala o das acções (S), considera-se que não existe rotura. No caso deste trabalho relaciona-se o momento resistente ( $M_r$ ) com o momento actuante ( $M_s$ ).

$$M_r \geq M_s \quad (2.1)$$

Quando a equação 2.1 é verificada não existe rotura no elemento estrutural. A resistência é função das propriedades dos materiais estruturais e das dimensões dos

elementos estruturais, enquanto o efeito das acções é função das cargas actuantes e das propriedades geométricas da estrutura. Existem também situações onde não é possível considerar as características resistentes independentes das características das acções, como é o caso de algumas estruturas geotécnicas [Laranja and Brito, 2003].

### 2.3.2 Conceito de probabilidade

Em problemas de análise de fiabilidade estrutural, as probabilidades são consideradas numa perspectiva Bayesiana.

Na interpretação Bayesiana, a probabilidade de um dado evento é definido como o grau de convicção de que este irá ocorrer. Por exemplo, quando se atira uma moeda ao ar, um engenheiro seguindo a interpretação de Bayes argumenta que existem duas possibilidades (cara ou coroa) e, como não existe nenhuma preferência, a probabilidade de sair cara é de 0.50. Esta interpretação deixa a possibilidade de que diferentes indivíduos tenham resultados probabilísticos diferentes para um mesmo acontecimento, devido ao grau de convicção de cada indivíduo depender da sua competência, experiência e conhecimentos em relação ao acontecimento.

O conceito fundamental da teoria de probabilidades de Bayes é que a falta de conhecimento deve ser tratada como uma variável probabilística, tal como outras incertezas. Na realidade as decisões têm de ser tomadas mesmo com falta de conhecimento, sendo as ferramentas probabilísticas uma grande ajuda neste processo [Faber, 2007]. Existem varias ferramentas probabilísticas, onde a determinação de variáveis aleatórias é a mais usual na caracterização realista da resposta estrutural e das solicitações [Henriques, 1998]. Para tal adoptam-se valores que têm em conta as distribuições reais das propriedades mecânicas dos materiais, das imperfeições geométricas dos elementos, das acções e de outras características significativas.

### 2.3.3 Variáveis aleatórias

Considerando a incerteza associada aos vários parâmetros relevantes para a análise estrutural, os vários parâmetros são definidos como variáveis aleatórias. As variáveis aleatórias modelam as incertezas associadas à geometria da estrutura, as propriedades dos materiais, as quantidades físicas que caracterizam as acções, as incompletas informações estatísticas e as descrições matemáticas idealizadas para aproximar o comportamento real físico da estrutura.

As variáveis aleatórias podem ser quantificadas, na maioria dos casos, por funções de distribuição de frequência onde os parâmetros são estimados com base em informação estatística e/ou informação subjectiva [Faber, 2007].

Existem dois tipos de variáveis aleatórias: variáveis discretas e variáveis contínuas. As variáveis discretas caracterizam-se por terem um espaço amostral incontável de valores. No entanto, quase todas as medidas físicas podem tomar valores em intervalos de valores reais (variáveis contínuas).

A função densidade de probabilidade,  $f_x(x)$ , permite avaliar a probabilidade de uma variável aleatória contínua num dado intervalo:

$$P_X[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx \quad (2.2)$$

onde  $a$  e  $b$  são os pontos que delimitam o espaço amostral.

Uma variável aleatória pode também ser representada por uma função de distribuição acumulada,  $F_x(x)$ , dada por:

$$F_x(a) = P_X[-\infty < X \leq a] = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \quad (2.3)$$

Na figura 2.1 ilustram-se exemplos da função de densidade de distribuição (a) e a função de distribuição acumulada (b).

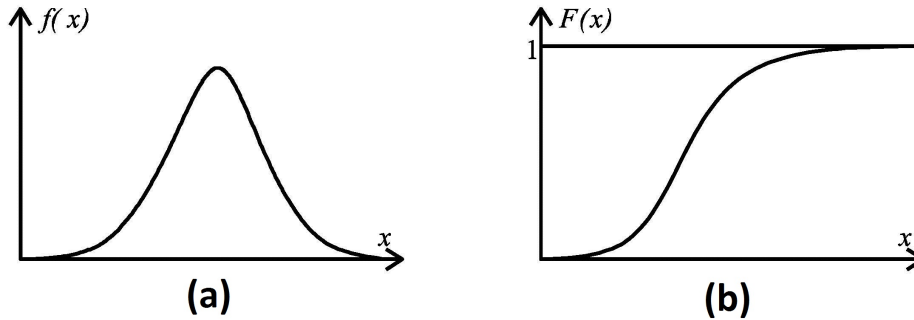


Figura 2.1: Representação gráfica das funções probabilísticas

### Caracterização das variáveis aleatórias

As variáveis aleatórias são geralmente definidas pela forma da sua distribuição e por alguns parâmetros, também conhecidos como momentos. Os parâmetros mais usuais para caracterizar as variáveis são a média e o desvio padrão ou variância (o quadrado do desvio padrão). A média descreve a tendência central da distribuição, enquanto que o desvio padrão é a medida de dispersão em torno do valor médio [Henriques, 1998].

Um momento ( $m_i$ ) de ordem  $i$  de uma variável aleatória contínua é definida por:

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f_x(x)dx \quad (2.4)$$

O valor médio de uma variável aleatória contínua é definido de acordo com o primeiro momento ( $i = 1$ ).

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (2.5)$$

A variância ( $Var[X]$ ) é descrita pelo segundo momento central de uma variável contínua e é definida pela seguinte expressão:

$$\sigma^2 = Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx \quad (2.6)$$

O coeficiente de variação (Cov) é definido pelo quociente entre o desvio padrão e a média:

$$Cov[X] = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (2.7)$$

O coeficiente de variação fornece uma medida adimensional da dispersão de uma variável aleatória.

### Tipos de distribuições

Existem várias distribuições de probabilidade exploradas pela teoria das probabilidades. A tabela 2.1 representa uma selecção destas distribuições, assim como a definição dos seus parâmetros de distribuição.

Tabela 2.1: Funções de distribuição de probabilidade

Tipo de Distribuição	Parâmetros	Momentos
Normal		
$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$\mu$	$\mu$
	$\sigma > 0$	$\sigma$
Lognormal, $x > 0$		
$f_x(x) = \frac{1}{(x-\varepsilon)\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\varepsilon)-\lambda}{\zeta}\right)^2\right)$	$\lambda$	$\mu = \varepsilon + \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\right)$
	$\zeta > 0$	
	$\varepsilon$	$\sigma = \exp\left(\lambda + \frac{\zeta^2}{2}\right) \sqrt{\exp(\zeta^2) - 1}$
Gamma, $x \geq 0$		
$f_x(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \exp(-bx) x^{p-1}$	$p > 0$	$\mu = \frac{p}{b}$
	$b > 0$	$\sigma = \frac{\sqrt{p}}{b}$
Exponencial		
$f_x(x) = \lambda \exp(-\lambda(x - \varepsilon))$	$\varepsilon$	$\mu = \varepsilon + \frac{1}{\lambda}$
	$\lambda > 0$	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$

## 2.4 Fiabilidade

A fiabilidade estrutural pode ser definida como a probabilidade de uma estrutura desempenhar as funções para que foi projectada ao longo da sua vida útil [Caldeira, 2007].

A falha estrutural pode ocorrer devido a solicitações extremas tais como: ventos muito fortes, avalanches, queda de neve, sismos ou devido a combinações de acções significativas em estruturas com resistência menor que o previsto [Faber, 2007]. De modo a avaliar a fiabilidade é portanto necessário estabelecer modelos probabilísticos tanto para as acções a que uma estrutura irá ser sujeita (nomeadamente peso próprio, sobrecargas, acção do vento, sismo, etc.) como para a capacidade resistente, que depende das propriedades dos materiais e da geometria dos seus elementos.

Resumindo, os métodos de fiabilidade estrutural baseiam-se na caracterização real da resposta estrutural ( $R$ ) e das solicitações ( $S$ ) a que está sujeita, através de variáveis aleatórias. Para tal adoptam-se valores que têm em conta as distribuições reais das propriedades mecânicas dos materiais, das imperfeições geométricas dos elementos estruturais, das acções ou dos seus efeitos [Henriques, 1998].

A probabilidade de rotura ( $P_f$ ) considerando duas variáveis aleatórias  $R$  e  $S$  pode ser determinada pelas seguintes expressões:

$$P_f = P(R \leq S) \quad (2.8)$$

$$P_f = P(R - S \leq 0) \quad (2.9)$$

onde  $R$  e  $S$  são definidas por funções de densidade de probabilidade, que representam, respectivamente, as resistências da estrutura e o efeito das acções.

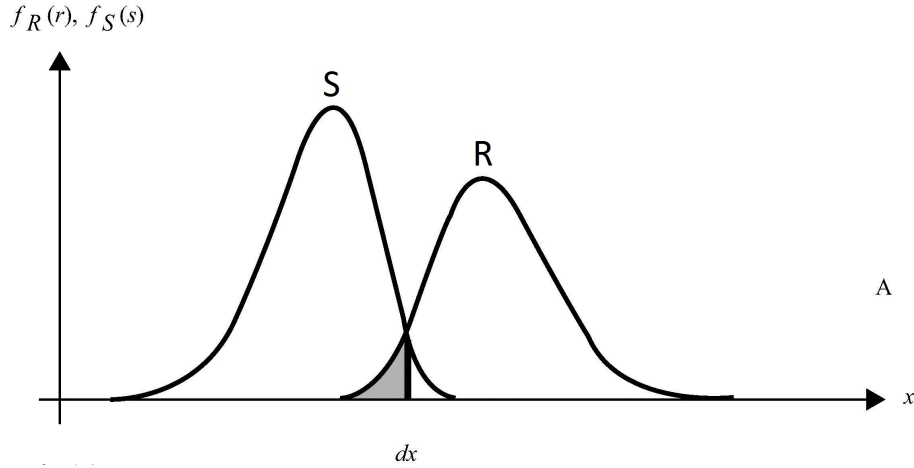


Figura 2.2: Zona de rotura resultante da sobreposição das funções de densidade de probabilidade [Faber, 2007]

A Figura 2.2 traduz, de modo simples, a teoria da fiabilidade pelo traçado das duas funções de densidade de probabilidade, podendo-se identificar a zona de rotura pela sobreposição das duas funções de densidade de probabilidade (curvas  $R$  e  $S$ ).

A diferença entre estas duas grandezas é denominada margem de segurança,  $M$ :

$$M = R - S \quad (2.10)$$

Quando a margem de segurança assume valores negativos ocorre a rotura.

Em geral não é possível reduzir o problema de fiabilidade às formulações simplificadas 2.8 e 2.9, que relacionam apenas a resistência  $R$  e a solicitação  $S$ , pois normalmente  $R$  e  $S$  são definidas por várias variáveis aleatórias, onde  $R$  depende das propriedades dos materiais e dimensões dos elementos estruturais enquanto  $S$  depende da

densidade dos materiais e das acções actuates na estrutura [Laranja and Brito, 2003].

Deste modo é indispensável recorrer ao conceito de função estado limite  $g(x)$ . A resistência e a solicitação são descritas por funções que de algum modo relacionam todas as variáveis aleatórias. A função estado limite é representada pela seguinte expressão:

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (2.11)$$

onde  $f_1(x)$  é a função das resistências  $R$  e  $f_2(x)$  é a função das solicitações  $S$ . É usual falar-se em zona de segurança quando a função estado limite assume valores positivos ( $g(x) > 0$ ) e zona de rotura quando a função estado limite assume valores negativos ( $g(x) < 0$ ).

Assim, a probabilidade de rotura pode ser definida por:

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad (2.12)$$

onde  $f_x(x)$  é a função densidade de probabilidade conjunta para o vector  $X$  e  $X$  representa as variáveis primárias aleatórias [Faber, 2007].

Nos casos comuns em que  $R$  e  $S$  são independentes, a expressão 2.12 pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_f = \int f_1(x) \cdot f_2(x) dx \quad (2.13)$$

Este integral é também conhecido por integral de convolução, correspondendo à soma de todos os casos de solicitação para os quais a resistência não excede as acções [Henriques, 1998].

De modo a se quantificar o conceito de probabilidade foi proposto um índice de fiabilidade ( $\beta$ ). Este índice é dado pela probabilidade de rotura ( $P_f$ ), afectada pela função inversa de distribuição normal.

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (2.14)$$

### 2.4.1 Níveis de Segurança

Os documentos "JCSS - Probabilistic Model Code" e o "Eurocódigo 0" (EC0) propõem valores recomendados para o índice de fiabilidade ( $\beta$ ). Os requisitos para a segurança estrutural são, por consequência, expressos através de valores mínimos do índice de fiabilidade ou máximos da probabilidade de rotura.

Estes valores são baseados numa optimização de procedimentos, partindo do pres-



suposto que a maioria das obras de engenharia segue políticas de manutenção razoáveis e sistematizadas [Vrouwenvelder, 2001].

Para efeitos da diferenciação da fiabilidade são estabelecidas 3 classes de consequências, tendo em conta as consequências do colapso ou do mau funcionamento da estrutura [CEN, 2009]. Foi criado um rácio  $\rho$  que é definido como o rácio entre os custos totais e os custos de construção. Os custos totais resultam de soma dos custos de construção e dos custos que a rotura pode causar [Vrouwenvelder, 2001].

Em função de  $\rho$ , as classes de consequências são as seguintes:

- Classe CC1  $\rho < 2$  - baixas consequências em relação a perda de vidas humanas e consequências económicas, sociais ou ambientais pouco importantes ou desprezáveis (ex: edifícios agrícolas, armazéns, estufas).
- Classe CC2  $2 < \rho < 5$  - médias consequências em termos de perda de vidas humanas; consequências económicas, sociais ou ambientais de importância média (ex: edifícios de habitação e de escritórios e edifícios públicos).
- Classe CC3  $5 < \rho < 10$  - elevadas consequências em termos de perda de vidas humanas, ou consequências económicas, sociais ou ambientais muito importantes (ex: centros comerciais, hospitais)

Na tabela 2.2 estão representados os valores mínimos do índice de fiabilidade ( $\beta$ ) para os estados limites últimos propostos pelo EC0:

Tabela 2.2: Valores mínimos recomendados do índice de fiabilidade (Eurocódigo 0)

Classe de fiabilidade	Período de referência de 1 ano	Período de referência de 50 anos
CC1	4.2	3.3
CC2	4.7	3.8
CC3	5.2	4.3

Na tabela 2.3 estão representados os valores mínimos do índice de fiabilidade ( $\beta$ ) para os estados limites últimos propostos pelo JCSS, para um período de referência de um ano:

Tabela 2.3: Valores mínimos recomendados para o índice de fiabilidade (JCSS)

Custo de segurança	CC1	CC2	CC3
Elevado	$\beta = 3.1$	$\beta = 3.3$	$\beta = 3.7$
Médio	$\beta = 3.7$	$\beta = 4.2$	$\beta = 4.4$
Reduzido	$\beta = 4.2$	$\beta = 4.4$	$\beta = 4.7$

A classe de custos de segurança média está associada a acções e resistências com variabilidade média.

### 2.4.2 Métodos de Cálculo da Probabilidade de Rotura

A probabilidade de rotura é determinada pela resolução da função 2.12. A determinação da função apenas é possível desde que se conheça a função densidade de probabilidade conjunta.

Resumidamente existem quatro métodos para o cálculo da probabilidade de rotura [Caldeira, 2007]:

1. Integração analítica exacta - apenas possível em casos muito simples;
2. Métodos de integração numérica - apenas utilizado em casos que o número de variáveis é pequeno;
3. Métodos do segundo momento - podem ser do tipo FORM (First Order Reability Method) ou SORM (Second Order Reability Method);
4. Métodos de simulação - o integral definido pela equação 2.12 é determinado por aproximações numéricas.

O cálculo da probabilidade de rotura através do método de integração exacta é determinado pela resolução exacta do integral definido pela função 2.12, ou seja, é determinado por distribuições normais, lognormais, exponenciais ou de Weibull [Caldeira, 2007]. Já o método de integração por métodos numéricos, calcula o integral com uma solução aproximada, por métodos como o método de Simpson ou a integração por rectângulos.

No entanto, estes dois métodos têm uma aplicação muito limitada, devido a terem um número de variáveis aleatórias muito limitado. Tendo em consideração que uma análise da segurança estrutural implica a consideração de uma grande quantidade de variáveis aleatórias, torna estes dois métodos ineficazes para o cálculo da probabilidade de rotura.

### 2.4.3 Método de Fiabilidade do Segundo Momento

A determinação analítica do integral de convolução (equação 2.13) só é possível em casos muito particulares [Henriques, 1998].

Para fins ilustrativos será considerado um primeiro caso em que a função de estado limite ( $g(x)$ ) é uma função linear definida por uma resistência  $R$  sujeita a uma acção  $S$ .

Admitindo que as variáveis aleatórias são independentes e normalmente distribuídas, com médias  $\mu_R$  e  $\mu_S$  e variâncias  $\sigma_R$  e  $\sigma_S$ , pode-se determinar o valor médio ( $\mu_g$ ) e o desvio padrão ( $\sigma_g$ ) da função estado limite ( $g(x)$ ).

$$\mu_g = \mu_R - \mu_S \quad (2.15)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (2.16)$$

A probabilidade de rotura de um problema deste tipo será então dada por:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2.17)$$

onde,

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (2.18)$$

$\beta$  é definido como o índice de fiabilidade e  $\Phi$  é a função distribuição normal reduzida.

A equação (2.18) representa o valor exacto da probabilidade de rotura quando as variáveis R e S têm uma distribuição normal. Para todos os outros casos o valor de  $P_f$  já não representa o valor exacto da probabilidade de rotura, logo existe a necessidade de quantificar o conceito de fiabilidade e para isso realiza-se um índice denominado como índice de fiabilidade ( $\beta$ ).  $\beta$  é uma medida de segurança estrutural, sendo o seu valor tanto maior quanto menor for a probabilidade de rotura [Henriques, 1998] como se pode verificar na tabela 2.4.

Tabela 2.4: Relação entre o índice de fiabilidade  $\beta$  e a probabilidade de rotura  $P_f$  [Vrouwenvelder, 2001]

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1.3	2.3	3.1	3.7	4.2	4.7	5.2

No entanto, devido à complexidade das estruturas de engenharia civil é normal que as variáveis básicas (R e S) não sejam independentes entre si nem sejam definidas por distribuições normais. São frequentes também as situações em que a função estado limite não é linear. Nestes casos não são válidas as propriedades generalizadas do método básico apresentado em cima. Este facto tem duas consequências directas: a média e o desvio padrão de  $g(x)$  não se podem obter através das expressões 2.15 e 2.16, a reposta de  $g(x)$ , resultante da aplicação da função linear às variáveis pode não ser normal [Laranja and Brito, 2003]. Surgem assim, como solução de problemas mais complexos do que o apresentado, os métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem

(FORM e SORM, respectivamente) e os métodos de simulação.

A formulação FORM baseia-se numa formulação sugerida por Hasofer e Lind (1974), que sugere a transformação da função de estado limite não linear ( $g(u) = 0$ ) numa função linear ( $g'(u) = 0$ ), em torno do ponto de dimensionamento ( $u^*$ ) num espaço normalizado [Faber, 2007]. A figura 2.3 ilustra esta situação num espaço bidimensional.

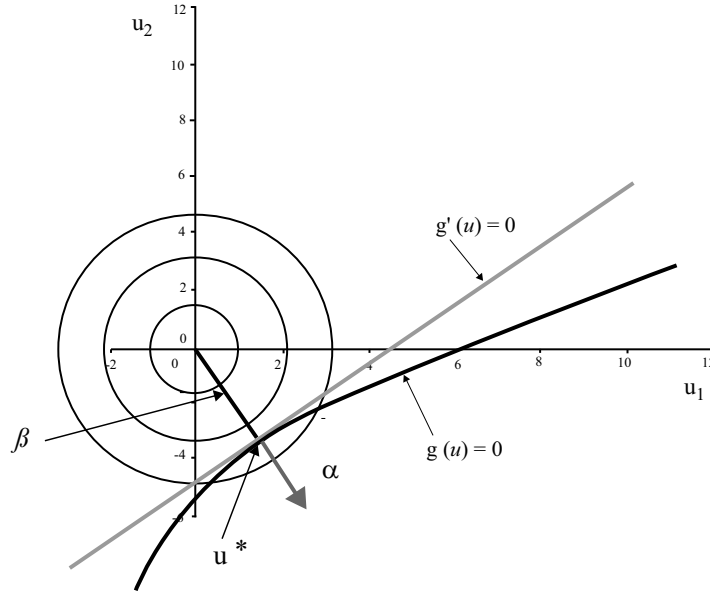


Figura 2.3: Ilustração bidimensional do procedimento de aproximação FORM (adaptado de Faber, 2007)

O índice de fiabilidade ( $\beta$ ) é dado pela menor distância entre a origem dos eixos das variáveis aleatórias normalizadas e a função estado limite normalizada ( $g'(u)$ ).  $\alpha$  representa um vector perpendicular à função estado limite no ponto de dimensionamento ( $u^*$ ).

Devido à função de estado limite ( $g(x)$ ) ser não linear, a determinação do ponto de dimensionamento ( $u^*$ ) não é imediata. Assim, o ponto de dimensionamento será determinado pela optimização da expressão:

$$\beta = \min_{u \in g(u)=0} \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (2.19)$$

A determinação do índice de fiabilidade pode ser resolvida de várias formas. Se a função estado limite for diferenciável, o problema pode ser resolvido através de [Faber, 2007]:

$$\alpha_i = \frac{-\frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \cdot \alpha)}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial u_i}(\beta \cdot \alpha) \right)^2 \right]^{1/2}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

$$g(\beta \cdot \alpha_1, \beta \cdot \alpha_2, \dots, \beta \cdot \alpha_n) = 0 \quad (2.21)$$

No processo iterativo começa por se arbitrar um ponto de dimensionamento ( $u^* = \beta \cdot \alpha$ ), inserindo o seu valor na equação 2.20. Calculado o vector  $\alpha$ , este é introduzido na equação 2.21, obtendo-se o novo valor de  $\beta$ , o que corresponde à primeira iteração. Este processo deve ser repetido até se verificar a convergência do índice de fiabilidade ( $\beta$ ).

Em alguns casos, a aproximação da função estado limite a uma superfície plana pode conduzir a resultados insatisfatórios, devido a algumas destas funções terem curvaturas significativas, ou ainda pode acontecer que uma função de estado limite linear representada por variáveis aleatórias com distribuições originais seja aproximada a uma superfície não linear, quando as variáveis aleatórias são transformadas para um espaço normal reduzido. Nestes casos é mais exacto recorrer-se a aproximações não lineares da função estado limite, onde os resultados são melhorados em comparação ao método FORM. Este método designa-se por SORM (métodos de fiabilidade de segunda ordem). No método de segunda ordem são normalmente utilizadas superfícies parabolóides e esféricas nas aproximações das superfícies de estado limite [Laranja and Brito, 2003].

#### 2.4.4 Métodos de simulação (Monte Carlo)

A palavra simulação refere-se a um método analítico cujo intento é imitar um sistema real. O objectivo desta é descrever a distribuição e caracterizar os possíveis comportamentos das variáveis independentes com ela relacionadas. A simulação de Monte Carlo é aquela que, correntemente, se usa quando se trata de problemas de engenharia civil.

O método de Monte Carlo é um modelo de simulação numérica que utiliza a geração de números aleatórios (valores de entrada) e cujo objectivo é obter parâmetros estatísticos (valores de saída) por um modelo computacional de um sistema estrutural. Estes dados de entrada são definidos por parâmetros estatísticos e obedecem a respectivas distribuições matemáticas. O método de Monte Carlo resulta de vários ciclos computacionais, onde em cada um deles são geradas as variáveis de entrada e são determinados os parâmetros de saída, sendo o conjunto dos resultados obtidos utilizado para determinar os parâmetros estatísticos das variáveis de saída [Laranja and Brito, 2003].

A utilização do método de Monte Carlo na estimativa da probabilidade de rotura de um dado sistema consiste em:

1. Gerar uma amostra de entrada de variáveis aleatórias definidas por parâmetros estatísticos e por distribuições matemáticas;
2. Calcular os parâmetros de saída por um modelo computacional;
3. Verificar a ocorrência de rotura, comparando os parâmetros de saída;
4. Repetir os passos 1, 2 e 3,  $N$  vezes, contando as ocorrências de rotura;
5. Estimar a probabilidade de rotura, pela expressão 2.22.

$$P_f = \frac{n_f}{N} \quad (2.22)$$

onde  $n_f$  representa o número de simulações em que ocorre rotura, e  $N$  o total de simulações realizadas.

### Número de simulações

É muito importante determinar o número total de simulações realizadas pois quando  $N \rightarrow \infty$  a estimativa da probabilidade de rotura torna-se exacta. No entanto, o incremento excessivo de simulações não é possível, porque maior número de simulações acarreta um grande esforço computacional.

Torna-se então muito importante saber qual o número ideal de iterações que gera resultados admissíveis. Segundo Faber (2007), para estimar uma probabilidade de rotura na ordem de  $10^{-6}$  serão necessárias aproximadamente  $10^8$  simulações, resultando assim um coeficiente de variância de aproximadamente 10%.

Na bibliografia encontram-se algumas sugestões para estimar o número de simulações ( $N$ ). Numa destas sugestões diz-se que o número de estimativas ( $N$ ) está entre  $1/P_f$  a  $10/P_f$ . Outro método para calcular o número de estimativas  $N$  é proposto por Bronding (1964) e é dado pela expressão [Bronding et al., 1964]:

$$N > \frac{-\ln(1 - c)}{P_f} \quad (2.23)$$

onde  $c$  é o nível de confiança da estimativa da probabilidade de rotura.

Existe também uma expressão sugerida por Shooman (1968), que indica o erro da probabilidade de estimativa ( $p_f$ ) para o número total de simulações utilizado ( $N$ ), com um nível de confiança de 95% [Shooman, 1968].

$$erro(\%) = 200 \sqrt{\frac{1 - P_f}{N \times P_f}} \quad (2.24)$$

### Características do método de simulação Monte Carlo

Em conclusão podem ser apresentadas algumas características do método de Monte Carlo que estiveram na origem da escolha deste para o trabalho realizado.

Em geral, o método de Monte Carlo pode ser aplicado a quase todos os tipos de acontecimentos. O erro associado a esta técnica é perfeitamente controlado a partir do aumento de simulações, o único inconveniente é o grande aumento do tempo de computação. A informação produzida por este método é extensa, pois a amostra para cada simulação é gerada aleatoriamente e pode-se analisar cada variável separadamente, podendo-se assim estudar para cada uma a sua contribuição para a segurança estrutural [Henriques, 1998].

Apesar do tempo excessivo de computação, o método de Monte Carlo pode caracterizar um sistema estrutural com todo o tipo de respostas estruturais e de acções (por exemplo, pode representar a não linearidade física dos materiais), ao contrário de técnicas sugeridas em alternativa a este método, que são geralmente limitadas a problemas lineares e a um reduzido número de graus de liberdade.

#### 2.4.5 Técnicas de redução da variância (Latin hypercube sampling (LHS))

O método Latin hypercube sampling (LHS) é um método estatístico para gerar uma distribuição de variáveis aleatórias com a redução da variância do valor esperado.

Este método produz uma amostragem restringida em vez de uma mostragem aleatória directa como o método puro de Monte Carlo. O método LHS garante que as amostras utilizadas cobrem todo o domínio do problema, através da divisão das funções de densidade de probabilidade, de cada variável aleatória, em intervalos de igual probabilidade.

O método LHS foi primeiramente proposto por McKay et al. 1979 e, tem sido desenvolvido para diferentes fins por vários pesquisadores [McKay et al., 1979]. Neste trabalho foi utilizada a proposta de Olsson et al. 2003 [Olsson et al., 2003].

#### LHS padrão

A precisão desejada da função de distribuição determina o número de realizações necessárias. Seja  $N$  o número de realizações e  $K$  o número de variáveis aleatórias.

O espaço de amostragem é então,  $K$ - dimensional.  $P$  é igual a uma matriz de  $N \times K$ , em que cada uma das colunas de  $K$  é uma permutação aleatória de  $1, \dots, N$ .  $R$  é uma matriz de  $N \times K$  de números aleatórios independentes a partir de uma distribuição uniforme de  $(0,1)$ . Estas matrizes formam o plano de amostragem base, representada pela matriz  $S$  como:

$$S = \frac{1}{N}(P - R) \quad (2.25)$$

Cada elemento  $S$ ,  $S_{ij}$ , é então mapeado de acordo com a sua distribuição marginal como:

$$\hat{x}_{ij} = F_{xj}^{-1}(S_{ij}) \quad (2.26)$$

onde  $F_{xj}^{-1}$  representa o inverso da função de distribuição cumulativa para a variável de destino  $j$ . O vector  $\hat{x}_i = [\hat{x}_{i1} \ \hat{x}_{i2} \ \dots \ \hat{x}_{ik}]$  contém agora dados de entrada para uma computação determinística.

Um possível plano de amostra para duas variáveis de entrada e cinco realizações é mostrado na Figura 2.4. Note-se que a amostra está espalhada por todo o espaço amostral, pois a geração do plano LHS requer uma imagem de cada linha e cada coluna. Em LHS o espaço amostral de cada variável é dividido em intervalos, sendo seleccionado apenas um valor de cada intervalo, como se apresenta na Figura 2.4.b.

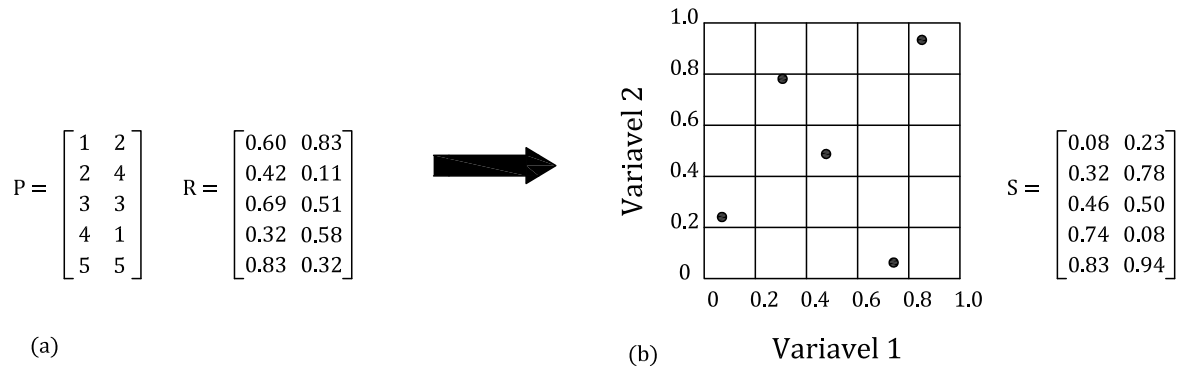


Figura 2.4: Latin cube, duas variáveis e cinco realizações. A matriz  $5 \times 2$  (a) determina o plano ilustrado em (b) (adaptado de Olsson et al., 2003)

### Redução de correlações espúrias

Mesmo que a distribuição marginal de cada variável seja representada de forma eficiente existe o risco de aparecimento de algumas correlações não desejadas, como representado



na Figura 2.5. No entanto, tem sido demonstrado que tal correlação espúria poderá ser reduzida pela modificação na permutação da matriz P. Os elementos da matriz P,  $P_{ij}$ , são divididos por  $N + 1$ , sendo N o número de realizações e, mapeados sobre uma distribuição Gaussiana com média igual a zero e um desvio padrão igual a um, da seguinte forma:

$$\gamma_{ij} = \Phi_{(0,1)}^{-1} \left( \frac{P_{ij}}{N + 1} \right) \quad (2.27)$$

Em seguida a co-variância da matriz Y é estimada e decomposta em matrizes triangulares usando a decomposição de Cholesty:

$$\overline{L}\overline{L}^T = cov(Y) \quad (2.28)$$

onde  $\overline{L}$  é uma matriz triangular inferior. Uma nova matriz  $Y^*$  com covariância de amostra igual à identidade é calculada com:

$$Y^* = Y \left( \overline{L}^{-1} \right)^T \quad (2.29)$$

Os elementos das colunas de  $Y^*$  são usados como os elementos das colunas da matriz  $P^*$ . Se os elementos da matriz P na equação 2.27 forem substituídos pelos elementos desta matriz, a amostra da matriz S irá conter uma quantidade consideravelmente menor de correlações indesejadas. Note-se, no entanto, que a decomposição de Cholesky da equação 2.28 exige que  $cov(Y)$  seja definida positivamente, o que por sua vez exige que o número de realizações seja superior ao número de variáveis aleatórias, ( $N > K$ ). A figura 2.5 ilustra o efeito de redução da correlação de um plano de amostragem de duas variáveis onde: (a) representa o plano de amostragem antes e (b) o plano de amostragem após a redução de correlação.

Se a matriz de correlação alvo for diferente da unidade, a correlação é relacionada, substituindo a equação 2.29 por:

$$Y^* = Y \left( \overline{L}^{-1} \right)^T L^T \quad (2.30)$$

onde L é uma matriz triangular inferior correspondente à decomposição de Cholesky da matriz de correlação de destino.

A correlação da amostra X (equação 2.26) é exactamente a correlação de destino se as variáveis estocásticas forem gaussianas e será um valor aproximado se as variáveis estocásticas não forem gaussianas. Um algoritmo iterativo poderá ser empregue para melhorar a correlação, no caso da correlação não ser gaussiana. O plano de amostragem, incluindo o processo de redução da correlação vai ser chamado de Correlation of Latin

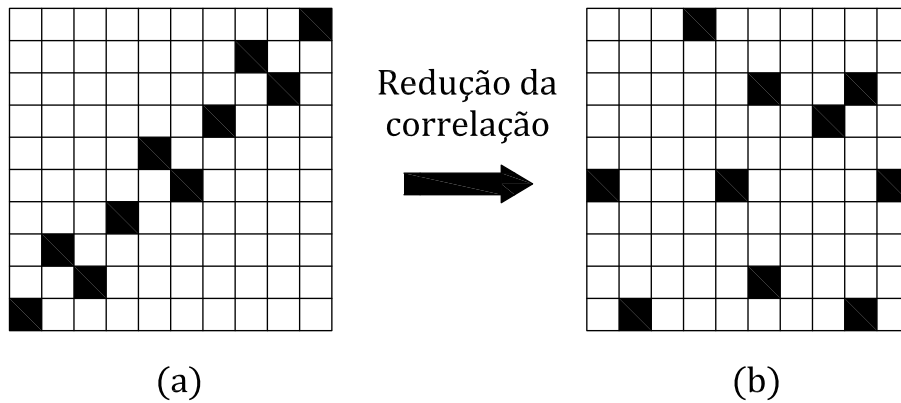


Figura 2.5: Amostragem com correlação espúria (a) e sem correlação espúria (b)

Hypercube Sampling plan (CLHS), em contraste com a versão padrão LHS. Por fim, é importante tomar em linha de conta que o processo de redução da correlação pode introduzir algum viés, ou seja, ao contrário do LHS, o CLHS não resulta num estimador centrado.

#### 2.4.6 Determinação da Distribuição de Probabilidade

Em problemas de engenharia é muito comum que existam algumas propriedades em que o tipo de distribuição e os parâmetros que as descrevem sejam desconhecidos, estes devem ser seleccionados com base em dados obtidos experimentalmente [Wiśniewski, 2007]. Além disso é necessário verificar se os dados experimentais se ajustam bem às distribuições previstas.

Os testes de hipóteses são uma regra de decisão utilizada para aceitar ou rejeitar uma hipótese com base em elementos amostrais. Existem vários tipos de teste de hipóteses, sendo possível dividi-los em dois grupos distintos. O primeiro grupo é baseado em técnicas de observação (histogramas, P-P plots, etc.) e o segundo é baseado em técnicas analíticas (teste do qui-quadrado, teste de Kolmogorov-Smirnov, etc.).

##### Teste Kolmogorov-Smirnov (K-S)

Nesta secção analisa-se sinteticamente o teste de Kolmogorov-Smirnov, devido a ser este o teste de hipótese analítico utilizado ao longo deste trabalho.

O teste K-S consiste em comparar a função de distribuição da amostra  $F_n(x)$  com a função de distribuição teórica  $F(x)$ . A estatística deste teste representa a maior distância (na vertical) entre as duas funções de distribuição  $F_n(x)$  e  $F(x)$  [Wiśniewski, 2007].

$$D_n = \max |F(x) - F_n(x)| \quad (2.31)$$

onde  $D_n$  também é uma variável aleatória, cuja distribuição depende do tamanho da amostra  $n$ .

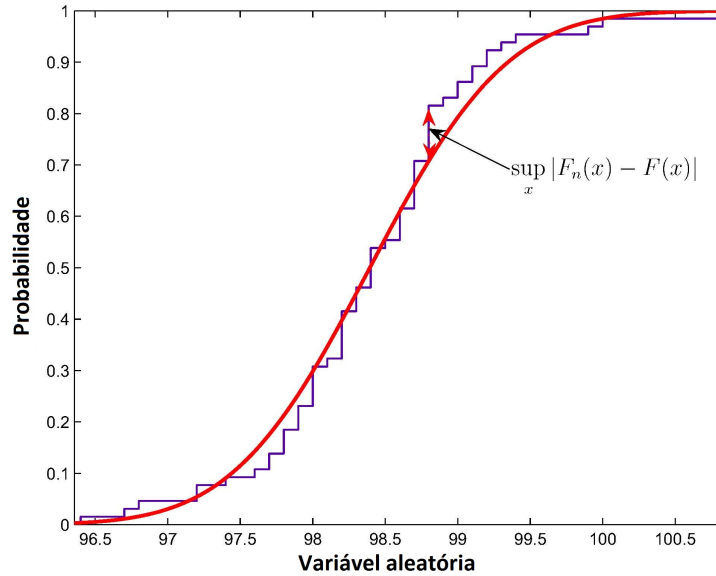


Figura 2.6: Estatística do teste K-S

O teste K-S consiste em determinar  $D_n$  e de seguida compará-lo com o respectivo valor crítico  $D_n^\alpha$ , onde  $\alpha$  é o nível de significância desejado. Sempre que a máxima diferença  $D_n$  seja menor ou igual a  $D_n^\alpha$  é assumido que a distribuição é aceitável para o nível de significância  $\alpha$ . Os vários valores de  $D_n^\alpha$  para vários níveis de significância são tabulados e apresentados na tabela 2.5.

Tabela 2.5: Limiares de significância para  $D_n$

N	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
5	0.565	0.669
10	0.41	0.49
15	0.338	0.404
20	0.294	0.356
25	0.27	0.32
30	0.24	0.29
35	0.23	0.27
>35	$1.36/\sqrt{N}$	$1.63/\sqrt{N}$

### 2.4.7 Implementação da simulação

Neste trabalho adoptou-se para o cálculo do integral que define a probabilidade de rotura o método de simulação Monte Carlo. No entanto, a utilização do método de Monte Carlo para calcular probabilidade de rotura seria excessivamente moroso. Assim, o processo de optimização foi dividido em três passos:

1. Simulação com recurso ao LHS para a determinação da distribuição probabilística do momento resistente ( $M_R$ );
2. Ajuste de uma lei lognormal aos resultados obtidos
3. Simulação de Monte Carlo com um grande número de amostras para calcular a probabilidade de rotura ( $p_f$ ), usando, para o momento resistente, a distribuição obtida no passo anterior.

Estas simulações foram realizadas através de um programa informático criado para o efeito. O programa foi implementado numa plataforma informática em Matlab.

## 2.5 Robustez

### 2.5.1 Aspectos Gerais

A investigação de estruturas relativamente à sua robustez tem ganho cada vez mais interessados no mundo da engenharia civil desde a ocorrência de vários colapsos de estruturas e edifícios, tais como o edifício de Ronan Point em Londres (1968) e o World Trade Center (2001) (figuras 2.7 e 2.8). As principais causas dos colapsos de estruturas e de edifícios são devido a: danos provocados por acidentes (explosões ou impactos); danos que podem surgir ao longo do tempo pelo envelhecimento das estruturas (degradação/deterioração), como por exemplo a corrosão das armaduras; erros de projecto; erros durante a execução e ainda por falta de manutenção que são impossíveis de projectar através do uso de códigos convencionais [Bhargava et al., 2007].



Figura 2.7: Ronan Point, Londres 1968 (adaptado de Cavaco, 2009)



Figura 2.8: World Trade Center, Nova Iorque 2001 (adaptado de Cavaco, 2009)

Em projectos de estruturas, o conceito de robustez é muitas vezes uma questão controversa, já que não existe um critério geral estabelecido para a sua definição e uma medida quantificada para a robustez estrutural [Biondini and Restelli, 2008].

Considerando-se a robustez como uma propriedade da estrutura, que poderá ser

definida como uma medida do grau de funcionalidade da estrutura após sofrer um dano. Esta relação poderá ter imensas formas, desde estados limites de serviço a estados limites últimos. O dano poderá variar de uma simples degradação a um dano muito grave, como a falha de um pilar ou viga. Erros de projecto ou de construção também podem ser considerados como tipo de danos [Cavaco, 2009].

### 2.5.2 Termos relacionados com a robustez

O termo robustez é normalmente usado como sinónimo de um vasto número de outros conceitos. Nesta secção estão representados alguns destes conceitos.

- **Colapso progressivo:** O colapso progressivo é caracterizado por uma acentuada desproporção entre a magnitude do dano numa estrutura e a sua consequência (geralmente resulta no colapso parcial ou total da estrutura) [Starossek, 2007]. Como exemplo de um colapso progressivo com colapso total da estrutura pode referir-se o World Trade Center (figura 2.8) e com colapso parcial pode referir-se o edifício Ronan Point (figura 2.7).
- **Resistência de colapso:** É definida como sendo a insensibilidade de uma estrutura a circunstâncias acidentais, que compreendem acontecimentos imprevisíveis ou de baixa probabilidade [Starossek and Haberland, 2008].
- **Vulnerabilidade:** Pode dizer-se que vulnerabilidade é o oposto da robustez e que não é uma propriedade estrutural [Starossek and Haberland, 2008]. A vulnerabilidade é referente à susceptibilidade de uma estrutura a danos provocados devido à sua exposição ambiental. Por exemplo a mesma ponte pode ser vulnerável à corrosão se estiver localizada num ambiente marítimo, mas invulnerável se estiver localizada num ambiente livre de agentes agressivos (cloretos e  $CO_2$ ) [Cavaco, 2009].
- **Tolerância ao dano:** Poderá ser considerada como um dos sinónimos de robustez. É a capacidade de manter o desempenho estrutural após a ocorrência de um dano.
- **Ductibilidade:** É a capacidade de uma estrutura sofrer deformações plásticas com a libertação de energia [Cavaco, 2009]. A ductibilidade tem uma grande influência no colapso progressivo e é geralmente listada como um factor que influencia a robustez de uma estrutura. No entanto, a avaliação da ductibilidade não é adequada para expressar a robustez de uma estrutura [Starossek and Haberland, 2008].

- **Redundância:** A redundância de uma estrutura refere-se à existência de múltiplos caminhos de carga numa estrutura na eventualidade de existir uma falha ou um dano. Se uma ou mais componentes falharem, a estrutura tem a capacidade para redistribuir as cargas e, por consequência, prevenir a sua falha total [Starossek and Haberland, 2008]. Como exemplo tem-se o caso da ponte em Lafayette Street (Manhattan), que em 1974 após a falha de uma viga no vão central não colapsou, devido à habilidade da superestrutura redistribuir as cargas [Frangopol and Curley, 1987].
- **Flexibilidade:** Está relacionada com a capacidade que uma estrutura tem em sofrer uma deformação elástica [Cavaco, 2009].

### 2.5.3 Quantificação da robustez

Desde que a robustez é considerada uma propriedade estrutural existe uma grande necessidade de quantificá-la. Vários modelos propostos são resumidamente descritos neste capítulo.

#### Frangopol e Curley, 1987

A proposta de Frangopol e Curley (1987) para quantificar a robustez tem duas abordagens, uma determinística e outra probabilística [Frangopol and Curley, 1987].

Na abordagem determinística, a medida da redundância ( $R$ ) é calculada a partir da reserva de resistência que está entre os componentes danificados e o colapso do sistema e pode ser definida pela seguinte expressão:

$$R = \frac{L_{intact}}{L_{intact} - L_{damaged}} \quad (2.32)$$

onde  $L_{intact}$  é a resistência total da estrutura sem dano.  $L_{damaged}$  é a resistência total de colapso da estrutura considerando, dano num ou mais membros. O factor de redundância é igual a um quando a estrutura danificada não tem reserva de resistência e é infinito quando o dano não tem qualquer influência sobre o desempenho da estrutura.

A abordagem probabilística é considerada a partir de um factor que tem em conta as variáveis aleatórias que existem na avaliação da segurança de estruturas danificadas. O factor é definido na seguinte expressão:

$$\beta_R = \frac{\beta_{intact}}{\beta_{intact} - \beta_{damaged}} \quad (2.33)$$

onde  $\beta_{intact}$  é o índice de fiabilidade do sistema intacto e  $\beta_{damaged}$  é o índice de fiabilidade

do sistema estrutural que sofreu dano. O factor  $\beta_R$  pode variar de infinito (grande robustez estrutural) a 1 (robustez estrutural nula).

### **Lind, 1995**

Outra proposta para quantificar a robustez partiu de Lind [Lind, 1995], que propõe uma medida genérica de tolerância de danos estruturais, com base no aumento da probabilidade de falha resultante da ocorrência de danos [Canisius et al., 2007].

$$V = \frac{P(r_d, S)}{P(r_0, S)} \quad (2.34)$$

onde  $r_d$  representa a resistência da estrutura danificada,  $r_0$  é a resistência da estrutura intacta,  $S$  é a carga que actua na estrutura e  $P( )$  representa a probabilidade de rotura.

### **Baker et al., 2008**

Baker et al. (2008) propuseram um índice de robustez que compara o risco associado com consequências directas e indirectas. As consequências directas são as consequências associadas a roturas localizadas nos elementos afectados e as consequências indirectas são roturas parciais ou globais causadas pelas consequências directas [Baker et al., 2008]. Assim, o índice de robustez proposto é apresentado pela seguinte expressão:

$$I_{rob} = \frac{R_{dir}}{R_{dir} + R_{ind}} \quad (2.35)$$

em que  $R_{dir}$  é o risco directo e o  $R_{ind}$  é o risco indirecto. Os valores de  $I_{rob}$  podem variar entre zero e um - valores maiores indicam maior robustez.

A motivação para este índice é a de que as estruturas com alto risco associado a consequências indirectas são mais prováveis de ter consequências desproporcionais, sendo então menos robustas. Além de quantificar o efeito do desempenho físico do sistema, esta abordagem pode ainda ter em conta situações de inspecções no âmbito de manutenções, ou até considerar situações mais complexas como eventos acidentais.

### **Cavaco, 2009**

A abordagem de Cavaco (2009) pretende descrever o comportamento de uma estrutura após a ocorrência de um dano. Esta abordagem define a robustez como uma medida do grau de desempenho estrutural após a ocorrência de dano. O dano pode variar de uma simples degradação a uma rotura estrutural, como a rotura de uma viga ou um pilar.



Associado a esta definição Cavaco (2009) propõe um índice de robustez estrutural dado pela equação 2.36.

$$R_d = \int_{d=0}^{d=1} f_d(x) dx \quad (2.36)$$

onde  $f_d$  é a resposta normalizada da estrutura obtida pela relação entre o desempenho estrutural máximo ( $F_D$ ) e o desempenho estrutural após um dano ( $F_0$ ) (o desempenho pode ser qualquer medida de resistência estrutural),  $d$  é dado pela relação entre o dano actual ( $D$ ) e o máximo dano possível ( $D_{max}$ ).

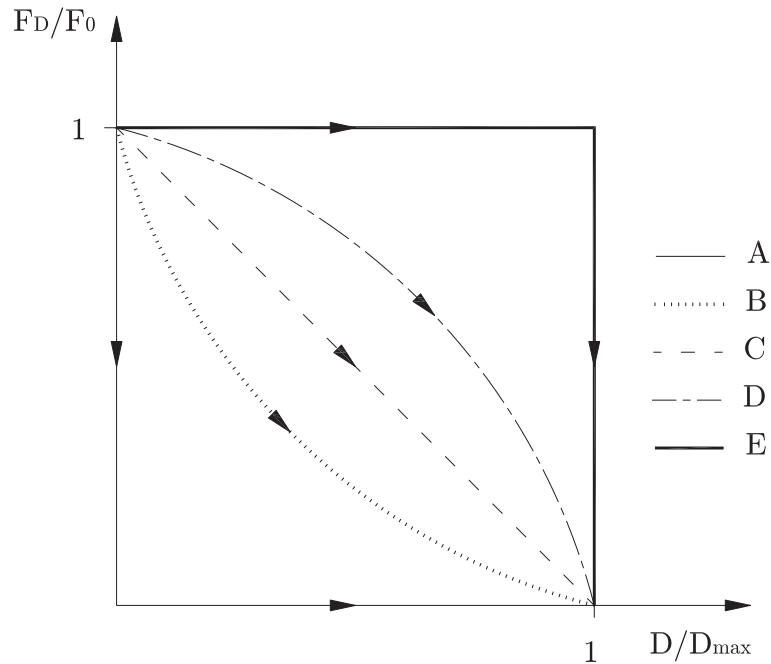


Figura 2.9: Resposta estrutural normalizada como função do dano normalizado

O índice de robustez estrutural varia de zero a um, com os casos extremos representados pelas curvas A e E, respectivamente (Figura 2.9). Para a curva A, um mínimo dano provocará a perda total do desempenho estrutural e para a curva E só o máximo dano possível é que causará alguma alteração no desempenho estrutural. A curva C representa um índice de robustez de 0.5.



# Capítulo 3

## Corrosão

### 3.1 Corrosão no betão armado

#### 3.1.1 Aspectos gerais

Num betão fresco e não contaminado, normalmente é formada uma camada de óxidos passivantes na superfície das armaduras, devido à elevada alcalinidade do betão. O passivante fornece uma adequada resistência contra a corrosão [fib, 2000]. A estabilidade da película passivante depende de dois factores que são a espessura do recobrimento e a qualidade do betão [Salta, 2007].

É apenas quando este ambiente passivante é corrompido que poderá ocorrer a corrosão das armaduras. O efeito de barreira pode ser perdido devido à penetração de cloretos no betão de recobrimento, devido à existência, na atmosfera, de dióxido de carbono que se difunde a partir da superfície do betão na estrutura porosa do betão de recobrimento e devido à carbonatação que provoca a diminuição do pH do betão, de cerca de 11.5 para cerca de 8.5, valor para o qual o filme de passivação deixa de ser termodinamicamente estável [Salta, 2007].

Desta forma a armadura não é susceptível a sofrer corrosão, a não ser que ocorram contaminações e deterioração/degradação do betão envolvente, visto que os seus constituintes inibem a corrosão do aço e se opõem à entrada de contaminantes. A degradação pode ocorrer devido a três tipos de acção: acções estruturais (impactos, sobrecargas, assentamentos, explosões e vibrações), a acções físicas (ciclos de gelo -degelo, acções térmicas, cristalização de sais, erosão/abrasão e retracção plástica) e por último por acções químicas (sulfatos, sais, água pura e soluções ácidas) [Salta, 2007].

A corrosão das armaduras pode ser classificada como local ou geral. A corrosão geral pode ocorrer devido à contaminação por cloretos ou pela carbonatação da camada do betão, originando a formação de óxidos de ferro.

A oxidação das armaduras conduz a um aumento do volume destas e, consequentemente, a um aumento do diâmetro dos varões, gerando tensões internas no betão, que geralmente levam à fendilhação e eventual separamento do recobrimento do betão. A corrosão local é associada à contaminação por cloretos e não à carbonatação. Estes componentes não exibem o mesmo aumento de volume como os óxidos de ferro, e como consequência pode existir uma grande perda da área efectiva das armaduras sem existirem quaisquer sinais de deterioração no betão [fib, 2000].

A figura 3.1 representa um potencial modelo do efeito da corrosão na capacidade resistente de uma estrutura de betão armado. A capacidade resistente de uma estrutura de betão armado pode ser afectada pela corrosão local ou geral, devido a alterações da secção transversal do próprio betão, devido à abertura de fendas, ou devido a perda de aderência. A perda da resistência e de ductibilidade da armadura são uma grande preocupação no que se trata da corrosão local. No caso da corrosão geral é mais provável que a perda da força de aderência entre o betão e a armadura afectem mais a capacidade resistente da estrutura do que a perda de ductibilidade e de resistência da armadura.

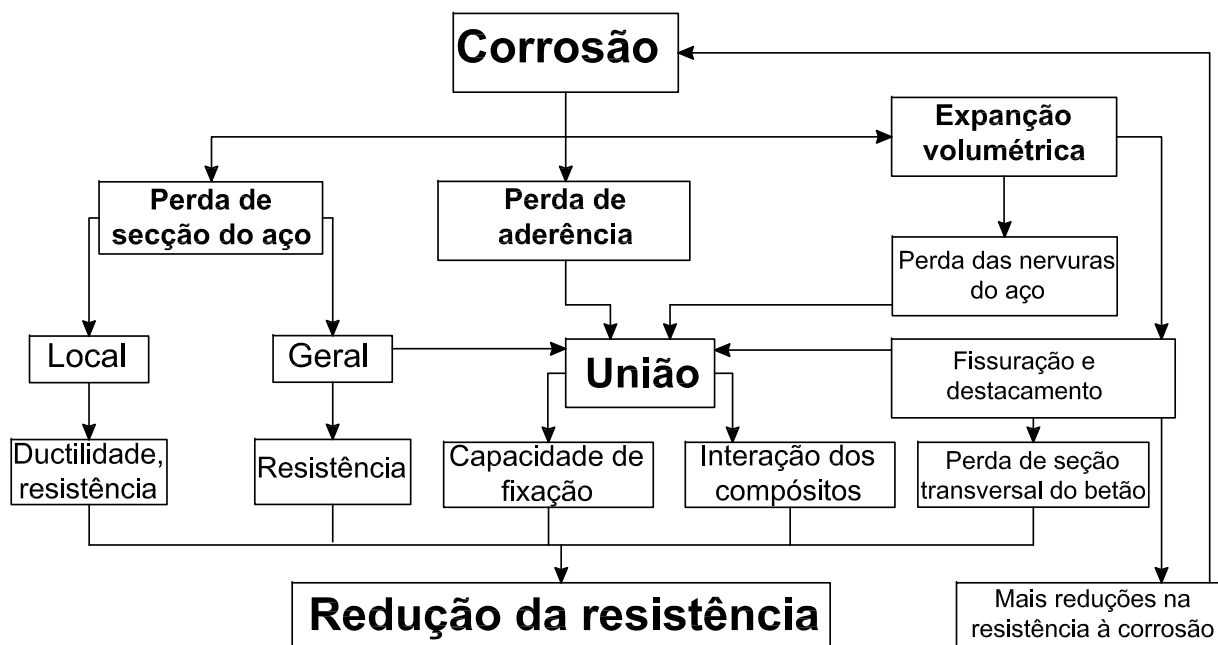


Figura 3.1: Efeito da corrosão na capacidade resistente de uma estrutura de betão armado (adoptado de Fib, 2000)

### 3.1.2 Efeitos da corrosão na força de ligação betão/armadura

Até recentemente, pouca ou nenhuma investigação foi relatada na literatura, sobre o efeito que a corrosão tem na ligação entre a armadura e o betão num elemento de betão armado.

No entanto nos últimos 15 anos houve um aumento da sensibilização para este problema, originando vários estudos e pesquisas por diversos investigadores [Rteil, 2007].

Onde alguns destes investigadores propuseram fórmulas empíricas para descrever a influência que a corrosão tem na força de ligação baseado-se em resultados experimentais ([Lee et al., 2002] e [Baker et al., 2008]), outros propuseram modelos analíticos para o cálculo da força de ligação para vários níveis de corrosão ([Coronelli, 2002] e [Wang and Liu, 2006]), e também foram propostos modelos modelados em elementos finitos para investigar o mecanismo da força de ligação em elementos corroídos de betão armado ([Berra et al., 2003] e [Lundgren, 2005]).

Apesar de terem existido várias pesquisas com modelos diferentes os resultados da variação da força de ligação com o aumento do nível de corrosão foram similares em quase todos os estudos [fib, 2000].

Os efeitos verificados em alguns desses estudos são representados esquematicamente na figura 3.2.

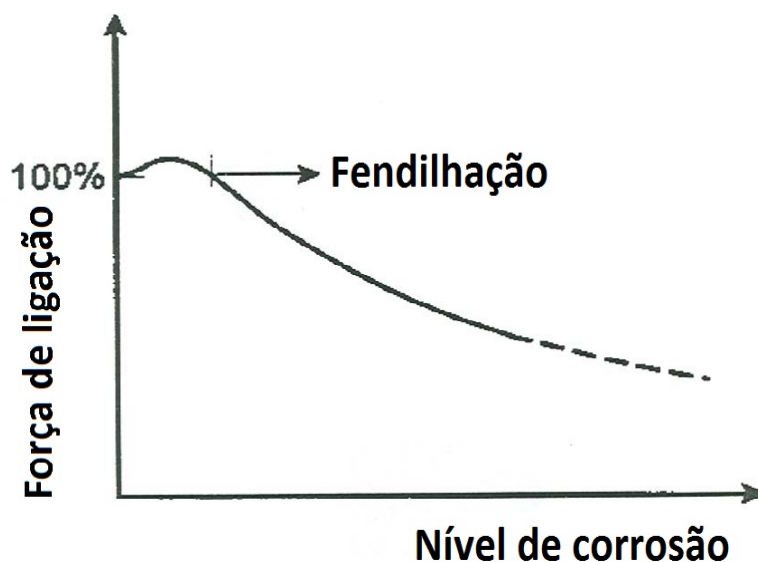


Figura 3.2: Variação da força de ligação com corrosão (adaptado de Fib, 2000)

Na primeira fase da corrosão, ou seja, com níveis pequenos de corrosão, existe um aumento da força de ligação. Este facto deve-se a existir um aumento do diâmetro dos varões onde este aumenta a força de atrito entre a armadura e o betão [fib, 2000].

No entanto com o aumento do nível de corrosão vão-se desenvolver fendas longitudinais onde a força de ligação será reduzida rapidamente, principalmente, devido a:

- Uma grave deterioração das nervuras dos varões que diminuem a componente de fixação mecânica entre a armadura e o betão;
- Uma redução do confinamento do betão na armadura devido ao alargamento das fissuras longitudinais;
- Um acumulação de uma camada de produtos de corrosão em redor da armadura que actua como um lubrificante, reduzindo a componente de atrito entre o betão e a armadura.

Também foi relatado que o escorregamento entre a armadura e o betão aumenta a um nível mais elevado que o aumento do nível de corrosão [Rteil, 2007].

### 3.1.3 Modelos de cálculo

#### Modelo de aderência (Slipping-fiber model)

Para se modelar a perda de aderência entre fibras (betão e aço) adoptou-se o modelo proposto por Oliver et al. (2008).

Este modelo consiste no uso de duas componentes em série, em que uma representa o aço das armaduras e a outra representa a interface entre o aço e o betão.

Assim, neste modelo é assumido que o escorregamento entre fibras é composto em duas partes:

$$\epsilon^f = \epsilon^d + \epsilon^i \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon^d$  é a deformação mecânica da fibra e  $\epsilon^i$  é a deformação devido ao deslizamento das fibras.

Assumindo um sistema de dois componentes em série, constituído por uma fibra e uma interface (figura 3.3), a tensão de escorregamento entre fibras  $\sigma^f$  é idêntica para cada elemento, ou seja:

$$\sigma^f = \sigma^d = \sigma^i \quad (3.2)$$

onde  $\sigma^d$  é a tensão de deformação da fibra e  $\sigma^i$  é a tensão de deformação da interface.

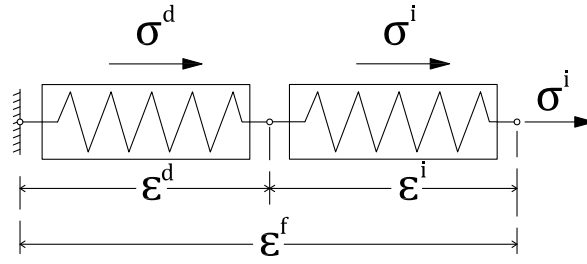


Figura 3.3: Modelo de perda de aderência (adoptado de Oliver et al., 2008)

Em ambos os casos a tensão de deformação pode ser definida via um modelo unidimensional elasto/plástico de endurecimento/amolecimento. O comportamento resultante para a perda de aderência é dada por um modelo elasto/plástico com as seguintes características:

$$\sigma_y^f = \min(\sigma_y^d, \sigma_{adh}^f) \quad (3.3)$$

$$E^f = \frac{1}{\frac{1}{E^d} + \frac{1}{E^i}} \quad (3.4)$$

onde  $E^d$  é o módulo de elasticidade do aço e  $\sigma_y^d$  é a tensão de cedência do aço.  $E^i$  é o módulo de elasticidade da interface e  $\sigma_{adh}^f$  é o limite da força de ligação.

A figura 3.4 representa a composição do modelo de perda de aderência.

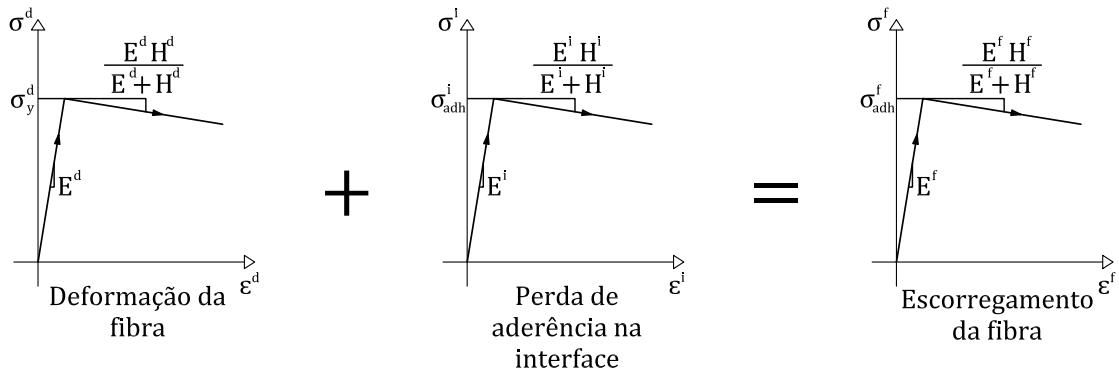


Figura 3.4: Composição do modelo de perda de aderência

Neste estudo considerou-se um comportamento elasto/plástico sem endurecimento, correspondendo a tomar os parâmetros perda de aderência ( $H^f$ ), fibra ( $H^d$ ), e interface ( $H^i$ ), nulos. O sistema reproduz uma combinação perfeita entre a interface betão e aço, quando o módulo de elasticidade da ligação é muito grande e a tensão resistente da

ligação é superior à tensão de cedência do aço.

Os parâmetros necessários para caracterizar o modelo de perda de adesão podem ser obtidas a partir de um teste de arrancamento, tendo-se neste trabalho adoptado o modelo de Bhargava [Bhargava et al., 2007]. Por último, para ter em conta a inexistência da corrosão considerou-se uma perfeita aderência entre o betão e o aço e um comportamento rígido -plástico para a interface.

### Força de ligação (Bond-Strenght deterioration)

A corrosão tem um grande papel no que se trata na deterioração da força de ligação. Uma análise bibliográfica mostra que foram feitos diversos estudos científicos no que se trata da deterioração da força de ligação, em que houve um variado uso de exemplares de tipos de varões e de ligação. No que resultou em uma ampla variedade de resultados para os mesmo níveis de corrosão [Cavaco, 2009]. Devido a isto a escolha de um modelo para a deterioração da força de ligação é uma tarefa complicada.

Para melhorar esta situação Bhargava (2007) desenvolveu um modelo empírico (modelo M -pull), baseado numa grande escala de testes de arrancamento.

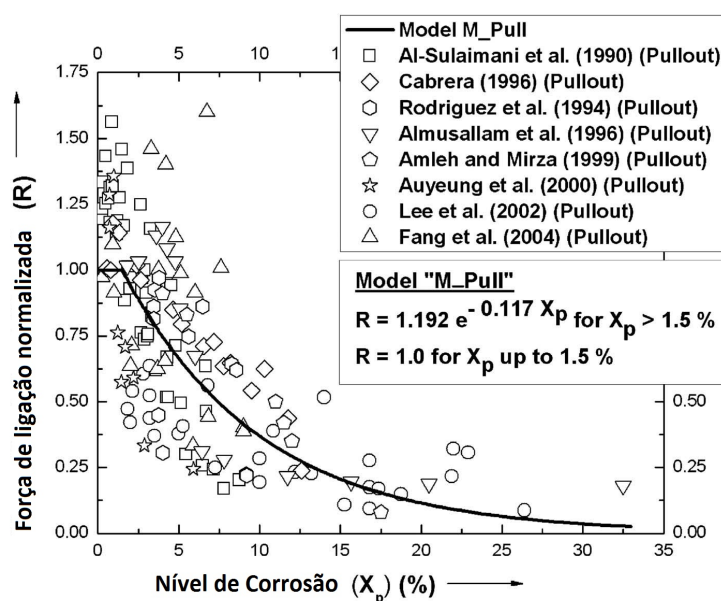


Figura 3.5: Resistência de união normalizada expressa em relação ao nível de corrosão (adaptado de Cavaco, 2009)

Este modelo foi adoptado neste trabalho: O modelo de Bhargava et al. (2007) tem em conta vários parâmetros, tais como pressões devido à corrosão, acção limitada do betão fendilhado, armadura transversal após a incorporação de produtos corrosivos e a perda de aderência e atrito entre a armadura e o betão fendilhado



[Bhargava et al., 2007].

O modelo define a resistência de ligação normalizada,  $R$ , como uma função do nível de corrosão,  $X_p$ . O nível de corrosão,  $X_p$ , é a perda de peso da armadura expresso pela percentagem do seu peso original. O modelo pode ser resumido pela equação 3.5 e pela figura 3.5.

$$R(X_p) = \begin{cases} 1.0 & \text{se } X_p \leq 1.5\% \\ 1.192 \times e^{-0.117X_p} & \text{se } X_p > 1.5\% \end{cases} \quad (3.5)$$

### Área efectiva

Na simulação da corrosão de um elemento de betão armado, além da deterioração da força de ligação também é considerada a redução da área efectiva do aço. Esta área é reduzida com o aumento do nível de corrosão ( $X_p$ ), da seguinte forma:

$$A_{eff} = A_0 \times (1 - X_p) \quad (3.6)$$

onde  $A_{eff}$  é a área efectiva de aço,  $A_0$  é a área inicial de aço e  $X_p$  é o nível de corrosão.

## 3.2 Conceitos fundamentais

### 3.2.1 Tensão de adesão betão/aço

A tensão de adesão entre a armadura e o betão é o fenómeno que permite a transferência das forças longitudinais entre os estes dois materiais [fib, 2000].

O betão é um material que possui uma fraca resistência à tracção pelo que quando fendilha, as tensões de tracção instaladas transferir-se-ão para a armadura.

Estas transferências de tensões entre os dois materiais (aço e betão), resultam no comportamento de um elemento de betão armado. A transferência das tensões resulta na tensão de ligação entre a interface do betão e da armadura [Rteil, 2007], e é a força de ligação (entre o betão e a armadura) que permite que os dois materiais trabalhem em conjunto.

Sendo a força de ligação um conceito importante, efectuaram-se, ao longo dos anos, vários estudos e investigações sobre este tema, sendo que, as mais antigas datam de 1877, a fim de explorar e compreender melhor o mecanismo de transferência de tensões entre os dois materiais.

### 3.2.2 Mecanismo de ligação

O mecanismo de ligação do betão armado pode ser dividido em três componentes (figura 3.6): uma ligação química entre o betão e o aço, fricção entre os dois materiais e um mecanismo de ligação devido a presença de irregularidades (nervuras) na superfície dos varões de aço [Al-Hammoud et al., 2010].

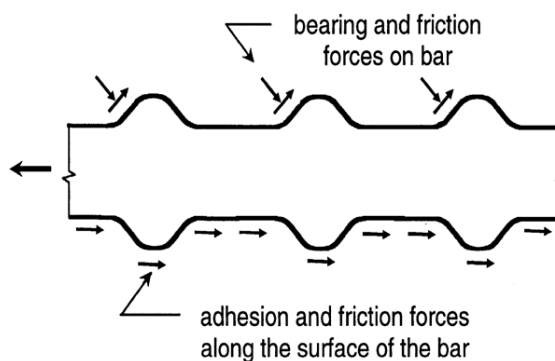


Figura 3.6: Mecanismo de ligação (adoptado de Rteil, 2007)

O primeiro mecanismo de ligação restringe o escorregamento entre a armadura deformada e o betão que a rodeia. À medida que o carregamento aumenta, a ligação química é quebrada devido às forças de ligação excederem as forças de ligação química dando origem ao escorregamento entre a armadura e o betão. É então que as forças de apoio nas nervuras do aço e as forças de atrito são mobilizadas. Com o aumento da carga as forças de atrito ao longo da interface aço betão diminuem e a principal via de transferência de tensões é devido às forças de atrito e de adesão actuantes nas nervuras do aço [Rteil, 2007].

### 3.2.3 Factores que afectam o vínculo de ligação

São vários os factores que afectam as forças de ligação numa estrutura de betão armado, entre os principais, o comprimento da armadura, as propriedades mecânicas do betão, a geometria do varão, a condição da superfície de contacto com a armadura e o confinamento fornecido para a zona crítica [Rteil, 2007]. Existem também outros aspectos menos críticos que afectam as forças de ligação tais como, os aspectos tecnológicos (o recobrimento, o espaçamento entre varões, número de camadas de varões, agrupamentos de varões, entre outras) [fib, 2000].

- **Comprimento do varão:** Com o aumento do comprimento de ligação, a superfície de contacto também aumenta, assim a força necessária para existir uma falha de ligação aumenta. No entanto, o aumento do comprimento de ligação não é proporcional ao aumento de força de ligação, ou seja, apesar de haver um aumento

da superfície de contacto, que por sua vez aumenta a força de atrito, a maioria das forças de ligação estão concentradas na extremidade do varão [Rteil, 2007].

- **Diâmetro do varão:** Para o mesmo comprimento de varão, quanto maior o diâmetro do varão, maiores são as forças de ligação resistentes. No entanto, varões com diâmetros maiores também necessitam de comprimentos maiores para chegarem ao mesmo nível de tensão, devido à área de superfície não aumentar proporcionalmente à secção transversal. [Rteil, 2007].
- **Geometria do varão:** A geometria do varão, mais especificamente a geometria das nervuras, são muito importantes para o comportamento da ligação e, é o instrumento que garante uma adequada transferência de tensões entre os dois materiais [fib, 2000].
- **Condição da superfície de contacto:** Geralmente os varões são limpos de quaisquer materiais não metálicos que possam reduzir a área de contacto entre o betão e a armadura. A introdução de resinas nos varões aumenta a sua resistência à corrosão, mas por outro lado diminui a força de ligação, devido à redução da fricção entre o betão e a armadura [Rteil, 2007].
- **Propriedades mecânicas do betão:** Em geral, à medida que a resistência mecânica (resistência às forças de tracção e de compressão) do betão aumenta, a força de ligação aumenta, mas a força de ligação aumenta a um ritmo mais lento do que a resistência mecânica, o que torna o modo de falha mais frágil.
- **Confinamento:** De todos parâmetros que afectam o vínculo de ligação entre o betão e o aço, o confinamento é um dos que têm o papel mais importante. O confinamento consiste nas tensões de compressão fornecidas pelo betão próximo dos varões (recobrimento inferior, superior e espaçamento entre varões) e dos estribos. À medida que o confinamento aumenta, a rigidez da ligação e a resistência da união aumentam também. Se o nível de confinamento for suficientemente elevado o modo de falha muda de escorregamento para arrancamento [Rteil, 2007].

### 3.2.4 Investigações experimentais do comportamento da força de ligação

Os estudos experimentais conduzidos para investigar a ligação betão/armadura são estudos onde se obtêm resultados relativos à força de ligação, à resposta carga - deslocamento e ao impacto dos parâmetros de cálculo. São utilizados também para

melhorar a compreensão dos mecanismos de ligação. A maioria destes testes podem ser classificados como testes de arrancamento ou testes tipo de tensão [Li, 2010].

- **Testes de arrancamento:** Os testes de arrancamento consistem em determinar a força de ligação entre o betão e o aço, medindo a força necessária para arrancar um varão inserido no betão. O aço pode ser inserido no betão fresco ou instalado em betão endurecido. Os testes de arrancamento têm como objectivo simular as condições da zona de contacto entre o betão e a armadura. A força de ligação é definida como tensão de aderência quando esta atinge o seu máximo num teste de arrancamento.

Para os testes de arrancamento os resultados mais directos e significativos são obtidos pela forma de tensão de aderência por dados de deslizamento. Os resultados dos ensaios mostram que inicialmente a ligação é muito rígida e, à medida que estes continuam existe uma perda de rigidez e um comportamento não linear. Quando é atingida a força máxima de ligação, ocorre uma rápida perda de tensão de aderência na zona danificada [Li, 2010].

- **Ensaio de tracção:** Consistem basicamente no traccionamento de um elemento de betão armado até a sua ruptura. São destinados a simular as condições de ligação dentro da zona de tensão de um elemento sujeito à flexão, como por exemplo, a meio vão de uma viga simplesmente apoiada. Se as tensões impostas no aço forem suficientemente grandes e se a força de ligação for adequada, as tensões transmitidas para o betão vão causar fendas no elemento. Nos testes de tracção os pontos principais a analisar são os padrões que as fendas criam.

# Capítulo 4

## Modelação de um elemento de betão armado

### 4.1 Análise da secção transversal

#### 4.1.1 Aspectos gerais

O betão é um material que apresenta uma boa resistência à compressão, um baixo custo e permite uma moldagem de formas diversas, sendo o seu grande inconveniente, a sua baixa resistência à tracção (que é cerca de 10 vezes menor que a de compressão [Vinagre, 2004]) e o seu tipo de rotura ser do tipo frágil.

O aço, por sua vez, é um material que apresenta uma grande resistência tanto à compressão como à tracção (cerca de 10 vezes superior à do betão) e têm uma grande capacidade de deformação associada a uma rotura dúctil. No entanto visto ser um material manufacturado têm custo muito elevados [Vinagre, 2004].

A junção dos dois materiais permite ultrapassar vários inconvenientes.

Para se efectuar uma modelação rigorosa de um elemento de betão armado, deve-se ter em conta a não linearidade física decorrente do comportamento mecânico dos materiais, adoptando-se diagramas de tensão -deformação (relação constitutiva) compatíveis com resultados obtidos experimentalmente, tanto para o betão como para o aço.

#### 4.1.2 Relações constitutivas

##### Relação constitutiva do betão

O betão apresenta comportamento diferente quando submetido a esforços de compressão ou de tracção, sendo a definição desta relação um dos aspectos importantes quando se efectua uma análise não linear.

Apresentam-se nesta secção os modelos utilizados que caracterizam a resistência à compressão e à tracção do betão. Adoptou-se o sinal positivo para a compressão e o sinal negativo para a tracção.

A resistência à compressão do betão é a sua característica principal. A sua determinação é baseada na realização de ensaios de compressão de provetes cúbicos ou cilíndricos, em prensas mecânicas [Vinagre, 2004].

A relação tensão-extensão é dada por [CEN, 2010]:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = f_{cm} \times \frac{K \times \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + (K - 2) \times \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \quad (4.1)$$

$\varepsilon_c$  é a extensão do betão,  $\varepsilon_{cu1}$  representa a extensão última do betão à compressão,  $\varepsilon_{c1}$  é a extensão correspondente à máxima tensão de compressão,  $f_{cm}$  é a tensão média de rotura do betão,  $E_{cm}$  representa o módulo de elasticidade secante do betão e o  $K$  é uma factor dado por:  $K = 1.05 * E_{cm} * \frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$ .

A equação 4.1 só é valida para valores de extensão,  $\varepsilon_c$ , inferiores à extensão ultima,  $\varepsilon_{cu}$ .

Apesar de o betão apresentar um comportamento elástico -frágil à tracção e sendo o valor de tensão de rotura muito inferior à de compressão, esta influencia os esforços resistentes das secções e, como tal, é considerada neste trabalho. Admitiu-se que o betão têm uma resistência de tracção entre 3 e 5 MPa ( $-1 \times 10^{-4} < \varepsilon_t < -1.67 \times 10^{-4}$ ) assim, obtemos a equação que modela o seu comportamento tanto quando sujeito a forças de compressão como a forças de tracção (equação 4.2).

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_c(\varepsilon_c) = f_{cm} \times \frac{K \times \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + (K - 2) \times \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} & \text{se } \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

A partir da equação 4.2 obtemos o diagrama (figura 4.1) que representa a relação constitutiva do betão à compressão e à tracção. Em compressão, o diagrama inclui dois troços distintos, um ascendente e um descendente. O primeiro representa o aumento de tensão com o acréscimo da deformação, designando-se por strain-hardening. O segundo troço representa uma estabilização ou redução da tensão instalada no betão, com o aumento de deformação, até atingir a rotura, este fenómeno designa-se por strain-softening. Em tracção, o diagrama é constituído por uma continuação da função de compressão até ao limite de tracção, que para este caso considerou-se de 3 MPa ( $\varepsilon_c \leq -1 \times 10^{-4}$ ).

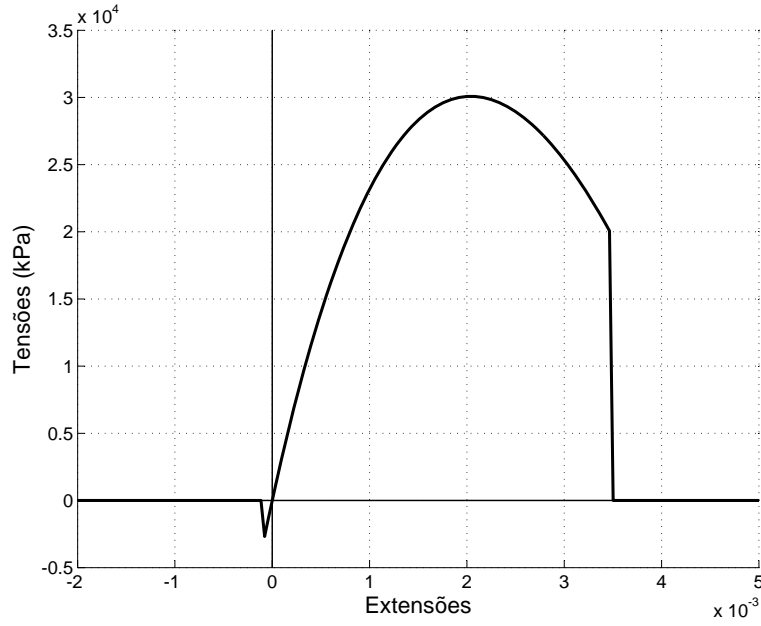


Figura 4.1: Relação Constitutiva do betão

### Relação constitutiva do aço

À semelhança do betão as características mecânicas do aço são determinadas através de ensaios de provetes verificando-se que o comportamento do aço em compressão é idêntico ao de tracção. Estes ensaios permitem observar que, em geral, a ductibilidade da armadura diminui com o aumento da tensão de cedência [Vinagre, 2004].

Existem inúmeros modelos de relações constitutivas que diferem na forma como são definidos os caminhos dos seus diagramas e no tipo de expressões matemáticas adoptadas. A complexidade do modelo adoptado está relacionada com o tipo de análise, (monotónica ou cíclica) e se se pretende uma análise da resposta em serviço ou à rotura [Vinagre, 2004].

O modelo adoptado neste trabalho é o modelo proposto pelo regulamento vigente para este tipo de material, ou seja, o EC2 [CEN, 2010]. Este considera um comportamento isotrópico elástico-plástico com plasticidade perfeita, que se representa pela seguinte expressão:

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} -f_y & , \varepsilon_s \leq -\frac{f_y}{E_s} \\ \varepsilon_s \times E_s & , \varepsilon_s \leq \frac{f_y}{E_s} \\ f_y & , \varepsilon_s > \frac{f_y}{E_s} \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $\sigma_s$  é a tensão,  $f_y$  é a tensão de cedência à tracção,  $E_s$  é o módulo de elasticidade e  $\varepsilon_s$  é a extensão.

Utilizando a relação constitutiva representada pela equação 4.3 obtém-se o diagrama (figura 4.2) de tensões-extensões tanto para o aço tracionado como para o aço comprimido.

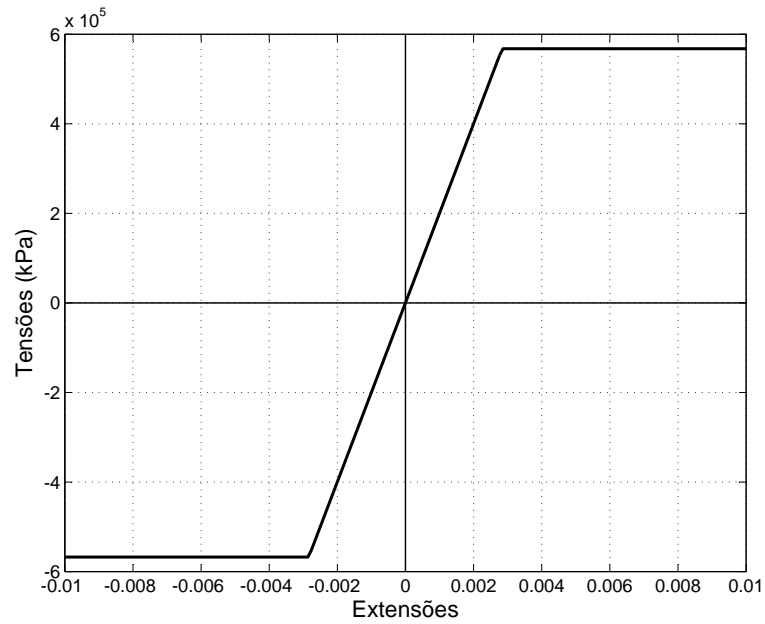


Figura 4.2: Relação Constitutiva do aço



### 4.1.3 Determinação da capacidade resistente à flexão simples de uma secção transversal

Considere-se uma secção transversal de um elemento de betão armado, sujeito a um momento flector e uma força de corte. Neste caso, as tensões normais de tracção e de compressão produzidas pelo momento reduzem-se a um binário de forças ( $F_c$ ,  $F_{s2}$  e  $F_s$ ,  $F_t$ ), que são equivalentes ao momento resistente da viga (Figura 4.3). As tensões tangenciais produzidas pela força de corte não influenciam as tensões normais produzidas pelo momento flector.

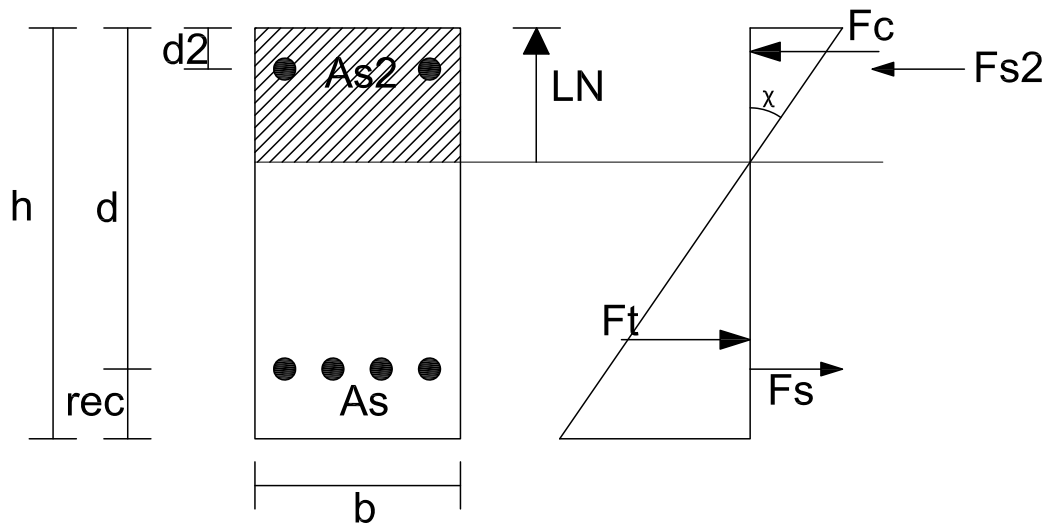


Figura 4.3: Forças actuates na viga

#### Modelação

A capacidade resistente à flexão simples de um elemento de betão armado pode ser determinada pelo estabelecimento das condições de equilíbrio da secção, da compatibilidade da secção e das relações constitutivas dos materiais. Para isso temos que admitir as seguintes hipóteses:

1. **Compatibilidade:** Pela hipótese de Bernoulli admite-se que as secções se mantêm planas após a deformação, sendo as variações das deformações do aço e do betão envolvente iguais, ou seja, existe uma suposição de aderência perfeita entre os materiais [Vinagre, 2004].
2. **Equilíbrio:** As resultantes das tensões internas são equivalentes aos esforços aplicados na secção, logo é possível obter o esforço normal e o momento flector através de equações de equilíbrio (equação 4.4):

$$N = \int_{A_c} \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n \sigma_s A_s = 0 \quad (4.4)$$

$$M = \int_{A_c} \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n \sigma_s y_s A_s$$

onde  $\sigma_c$  — é a tensão nas fibras de betão comprimido, a  $A_c$  — é a área da secção de betão comprimido,  $\sigma_s$  — é a tensão na armadura,  $A_s$  — é a área da armadura e  $y$  — é a distância da fibra (betão e aço) ao centro de gravidade da secção.

**3. Relações constitutivas:** As relações constitutivas adoptadas estão referidas anteriormente. Nelas é de destacar que a extensão máxima de encurtamento do betão é limitado a 3.5‰ e a extensão máxima de alongamento do aço é limitada a 10‰.

Com base nestas hipóteses de cálculo é possível determinar os esforços resistentes de uma secção de betão armado [Vinagre, 2004].

Para o cálculo dos esforços resistentes (momento resistente) adoptou-se a distribuição de tensões representado na figura 4.4 sendo que as tensões dependem do valor da curvatura ( $\chi$ ).

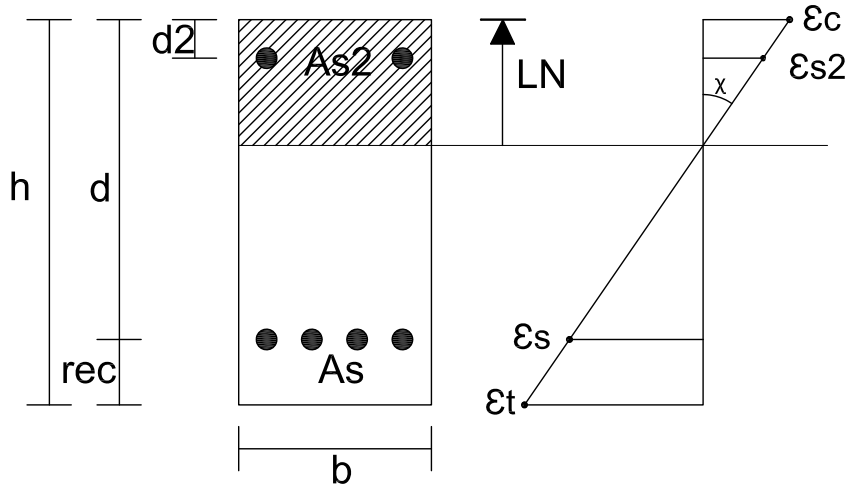


Figura 4.4: Distribuição de extensões

A partir do modelo representado na figura 4.4 podemos definir as extensões do aço e do betão em relação à curvatura.

$$\varepsilon_c = \chi \times LN \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{s2} = \chi \times (d_2 - LN) \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_s = \chi \times (d - LN) \quad (4.7)$$

onde  $\chi$  é a curvatura, LN é a distancia da linha neutra, d e d2 são as alturas úteis para a armadura inferior e superior, respectivamente.

Usando as equações 4.5, 4.6, 4.7 e recorrendo às relações constitutivas do aço (4.2) e do betão (figura 4.1) obtém-se as tensões dos materiais. Sabendo as áreas que estão submetidas a estas tensões obtemos as forças actuates na secção transversal, que estão representadas na figura 4.3.

$$F_c = b \times \int_0^{LN} \sigma_c \left( \frac{\varepsilon_c \times p}{LN} \right) dp, p \in [0, LN] \quad (4.8)$$

$$F_t = b \times \int_0^{h-LN} \sigma_t (X \times p_2) dp_2, p_2 \in [0, h - LN] \quad (4.9)$$

$$F_{s2} = A_{s2} \times \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}) \quad (4.10)$$

$$F_s = A_s \times \sigma_s(\varepsilon_s) \quad (4.11)$$

onde  $F_c$  é a força de compressão do betão,  $F_s$  e  $F_{s2}$  é a força de compressão/tracção da armadura inferior e superior, respectivamente,  $F_t$  é a força de tracção do betão, b é a largura da secção transversal,  $A_s$  é a área da armadura inferior,  $A_{s2}$  é a área da armadura superior,  $\sigma_c$  é a tensão de compressão do betão,  $\sigma_t$  é a tensão de tracção do betão,  $\sigma_s$  e  $\sigma_{s2}$  é a tensão de cedência do aço na armadura inferior e superior, respectivamente.

Pelo equilíbrio estático calcula-se a posição da linha neutra (LN), de maneira a que a soma das forças horizontais seja nula.

$$\sum F_h = 0 \Leftrightarrow F_c + F_{s2} - F_s - F_t = 0 \quad (4.12)$$

Com as equações das forças definidas e a posição da linha neutra calculada obtém-se o momento flector resistente. Este é calculado pelo somatório de momentos relativamente à posição da armadura inferior ( $A_s$ ).

$$M_r = b \times \int_0^{LN} \sigma_c \left( \frac{\varepsilon_c \times p}{LN} \right) \times (d - l + p) dp + A_{s2} \times \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}) \times (d - d_2) - b \times \int_0^{h-LN} \sigma_t (X \times p_2) \times (h - LN - p_2) dp_2 \quad (4.13)$$

**Resultados**

Considerando-se uma viga com característica apresentadas nas tabelas 4.1 e 4.2, obtém-se as tensões instaladas na secção transversal bem como o seu momento resistente.

Tabela 4.1: Características da viga (Dimensões)

Dimensões da Viga					
h (m)	b (m)	d (m)	$d_2$ (m)	$A_s$ (m <sup>2</sup> )	$A_{s2}$ (m <sup>2</sup> )
0.70	2.00	0.65	0.05	$26 * 3.14e^{-4}$	$20 * 1.13e^{-4}$

Tabela 4.2: Características da viga (Materiais)

Propriedades dos Materiais		
$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$f_{y2}$ (MPa)
30	400	400

Para compreender os resultados obtidos convém analisar a evolução das tensões da secção de betão armado, com o aumento da solicitação. Para simular este aumento considerou-se uma curvatura variável, entre 0 e 0.004, de acordo com a equação 4.13. Assim, obtém-se o diagrama que relaciona o momento resistente com a curvatura (figura 4.5).

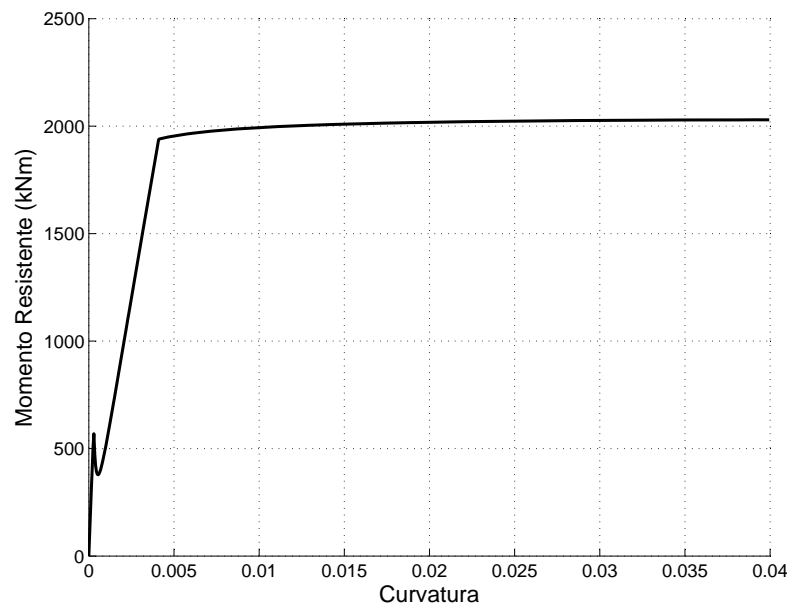


Figura 4.5: Diagrama Momento Resistente-Curvatura

Como se pode verificar na figura 4.5 encontram-se 3 troços distintos, em que o primeiro representa a fase não fendilhada, o segundo representa a fase de serviço e o terceiro representa a fase de rotura.

**Fase não fendilhada (primeiro troço)** Nesta fase o elemento tem um comportamento elástico e as tensões de tracção desenvolvidas no betão são inferiores à tensão resistente do betão à tracção, pelo que se pode considerar que está instalado na secção um campo linear de tensões [Vinagre, 2004]. Mas à medida que a curvatura (aumento da solicitação) aumenta, as tensões de tracção do betão aumentam e este vai começar a fendilhar e a perder a sua resistência de tracção como se pode verificar na figura 4.6.

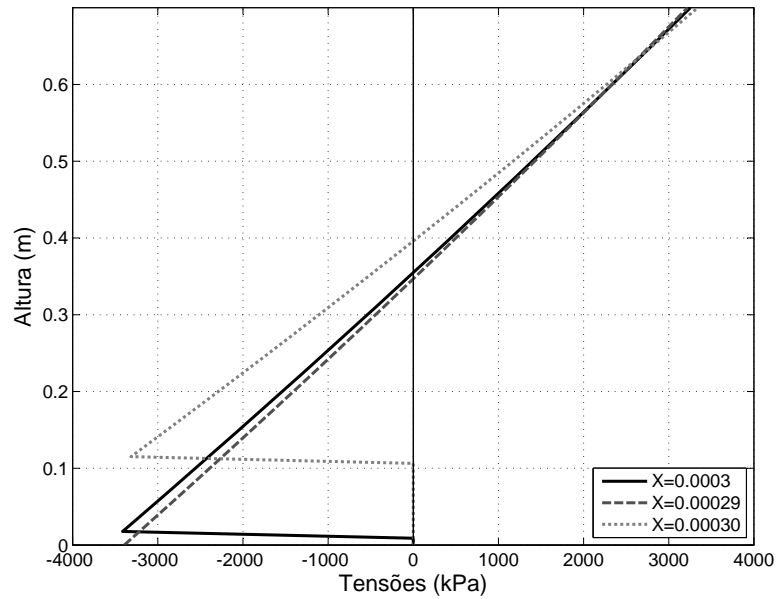


Figura 4.6: Tensões presentes na fase não fendilhada

**Fase de serviço (segundo troço)** Com o aumento da curvatura (solicitação), a tensão de tracção excede a resistência à tracção do betão, passando o momento a ser equilibrado pelo binário constituído pela resultante das tensões de compressão e pela força de tracção das armaduras. Nesta fase o nível de tensões instalado no elemento (ver figura 4.7) ainda é baixo, pelo que o diagrama de tensões ainda têm um aspecto linear [Vinagre, 2004]. Na transição da fase de serviço para a fase de rotura existe uma pequena perda de resistência no elemento como se pode verificar na figura 4.5 em que o momento resistente diminui mesmo quando a curvatura aumenta.

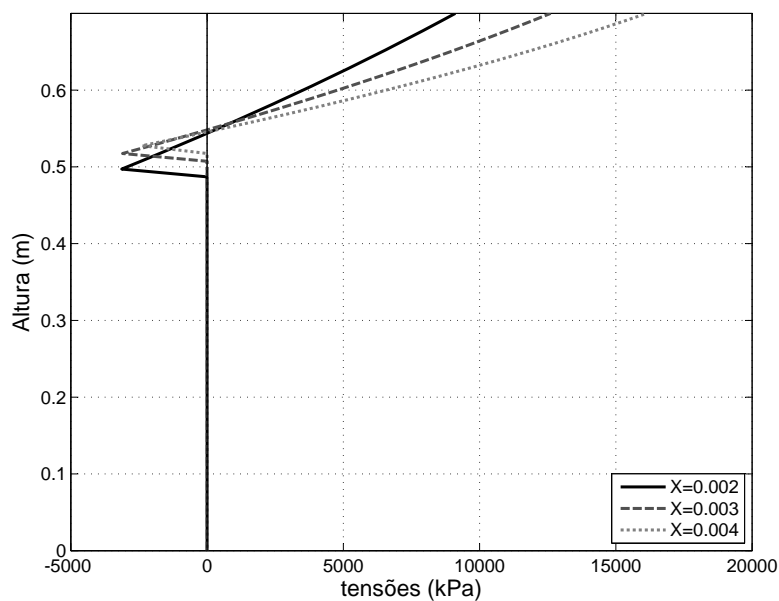


Figura 4.7: Tensões presentes na fase de serviço

**Fase de rotura (terceiro troço)** Com o aumento da solicitação o valor do momento aplicado fica muito elevado onde o nível de tensões instalado no betão entra na sua fase não linear. Dada a maior capacidade de deformação das armaduras a rotura dá-se, em geral, por esmagamento do betão [Vinagre, 2004]. A figura 4.8 representa as tensões instaladas no terceiro troço.

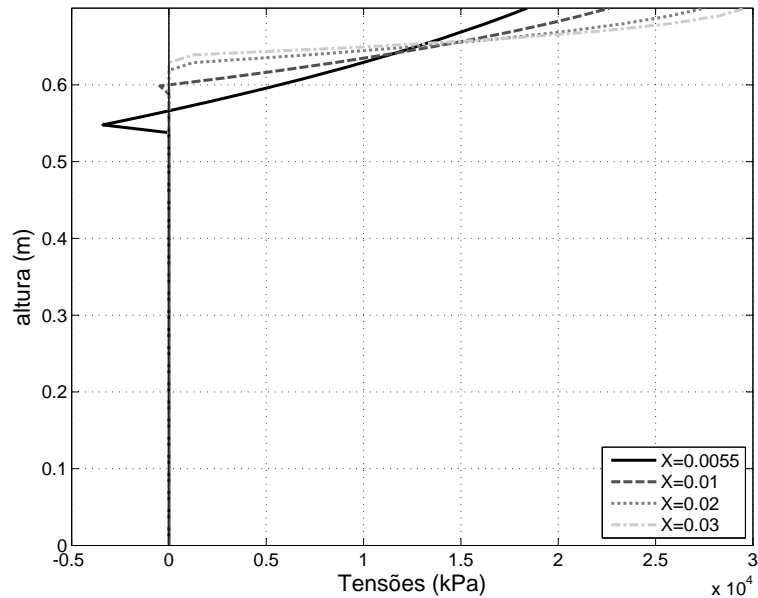


Figura 4.8: Tensões presentes na fase de rotura

## 4.2 Análise da secção transversal de um elemento de betão armado com corrosão

### 4.2.1 Aspectos gerais

A corrosão num elemento de betão armado atinge directamente a armadura e têm duas principais consequências: causa um aumento do volume inicial do aço (é responsável pelo aumento das pressões de interface entre o betão e o aço, e por sua vez o aparecimento de tensões de tracção em arco, quando estas excedem a tensão resistente de tracção do betão este fendilha) e provoca a degradação da altura das nervuras do aço (resultando no enfraquecimento da força de ligação e da fixação entre o betão e o aço).

A perda da força de ligação afecta directamente a resistência de um elemento de betão armado em relação aos estados limites de utilização e aos estados limites últimos.

Na simulação da corrosão admite-se um modelo de escorregamento de fibras para simular a perda da força de ligação, também é admitido um modelo de diminuição da área efectiva da armadura.

### 4.2.2 Determinação da capacidade resistente de uma secção de betão armado com corrosão

A corrosão afecta directamente o aço e as suas características. Implementando os modelos apresentados em capítulos anteriores é possível determinar os esforços resistentes de uma secção de betão armado com a presença de corrosão.

As relações constitutivas adoptadas para o cálculo da nova capacidade de carga são idênticas aos adoptados anteriormente, com uma diferença no modelo do aço.

O modelo de escorregamento entre fibras é caracterizado pela expressão 3.3, onde  $\sigma_y^d$  é obtido pela relação constitutiva do aço e  $\sigma_{adh}^f = \sigma_y^d \times R(X_p)$ . Sabendo que  $\sigma_y^d > \sigma_{adh}^f$  pode-se implementar o modelo de escorregamento entre fibras directamente na relação constitutiva do aço. Assim obtém-se uma nova relação constitutiva do aço dependendo do nível de corrosão, que é dada pela expressão 4.14.

$$\sigma_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} -f_y \times R(X_p) & , \varepsilon_s \leq -\frac{f_y}{E_s} \times R(X_p) \\ \varepsilon_s \times E_s \times R(X_p) & , \varepsilon_s \leq \frac{f_y}{E_s} \times R(X_p) \\ f_y \times R(X_p) & , \varepsilon_s > \frac{f_y}{E_s} \times R(X_p) \end{cases} \quad (4.14)$$

onde  $f_y$  é a tensão de cedência à tracção do aço,  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço,  $\varepsilon_s$  é a extensão do aço,  $X_p$  representa o nível de corrosão e  $R(X_p)$  representa o modelo



## 4.2. ANÁLISE DA SECÇÃO TRANSVERSAL DE UM ELEMENTO DE BETÃO ARMADO COM CORROSÃO

da deterioração da força de ligação definido pela equação 3.5.

A capacidade resistente à flexão de um elemento de betão armado com corrosão poderá assim ser determinada pelas mesmas condições já representadas, ou seja, pelo estabelecimento das condições de equilíbrio, da compatibilidade da secção e pelas relações constitutivas dos materiais.

A partir destas hipóteses determinam-se os esforços resistentes de uma secção de betão armado com corrosão.

As forças actuantes na secção transversal considerando a notação apresentada na figura 4.3, são dadas por:

$$F_c = b \times \int_0^{LN} \sigma_c \left( \frac{\varepsilon_c \times p}{LN} \right) dp, p \in [0, LN] \quad (4.15)$$

$$F_t = b \times \int_0^{LN} \sigma_t(X \times p_2) dp_2, p_2 \in [0, d - LN] \quad (4.16)$$

$$F_{s2} = A_{s2}(X_p) \times \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}) \quad (4.17)$$

$$F_s = A_s(X_p) \times \sigma_s(\varepsilon_s) \quad (4.18)$$

Pela soma das forças horizontais definidas anteriormente, determina-se a posição da linha neutra:

$$\sum F_v = 0 \Leftrightarrow F_c + F_{s2} - F_s - F_t = 0 \quad (4.19)$$

Por último obtém-se o momento flector resistente de uma secção transversal de betão armado para qualquer nível de corrosão:

$$M_r = b \times \int_0^{LN} \sigma_c \left( \frac{\varepsilon_c \times p}{LN} \right) \times (d - l + p) dp + A_{s2}(X_p) \times \sigma_{s2}(\varepsilon_{s2}) \times (d - d_2) - b \times \int_0^{LN} \sigma_t(X \times p_2) \times (d - LN - p_2) dp_2 \quad (4.20)$$

### 4.2.3 Resultados

Admitindo a viga definida anteriormente (Tabela 4.1), obtém-se os diagramas da relação constitutiva do aço e do betão e o momento resistente da viga todos dependentes do nível de corrosão.

A Figura 4.9 representa a relação constitutiva do aço para alguns níveis de corrosão,

onde se constata que à medida que o nível de corrosão ( $X_p$ ) aumenta a tensão resistente do aço diminui.

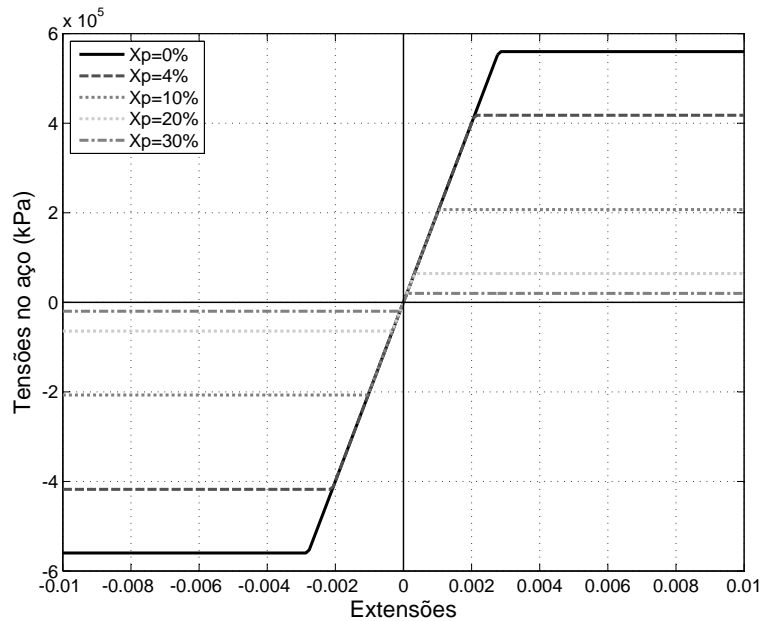


Figura 4.9: Relação constitutiva do aço com 5 níveis de corrosão

O diagrama 4.10 representa o momento resistente da viga de betão armado para vários níveis de corrosão. À medida que a corrosão aumenta a capacidade resistente da viga diminui, estabilizando num nível de corrosão próximo dos 30%.

Mesmo para níveis de corrosão onde a força de ligação entre o betão e o aço é nula, a viga tem resistência. Analisando o diagrama momento resistente/curvatura para alguns níveis de corrosão (Figura 4.11) conclui-se que o elemento estabiliza a sua resistência a partir dos 30% de corrosão, devido às armaduras de aço perderem praticamente a sua resistência e só o betão é que contribui para a resistência da viga, ou seja o equilíbrio da viga é encontrado pelas forças de tracção e de compressão do betão. Se neste trabalho não se considerasse a resistência do betão à tracção, para um nível de corrosão,  $X_p$ , superiores a 30% a resistência da viga seria nula.

#### 4.2. ANÁLISE DA SECÇÃO TRANSVERSAL DE UM ELEMENTO DE BETÃO ARMADO COM O

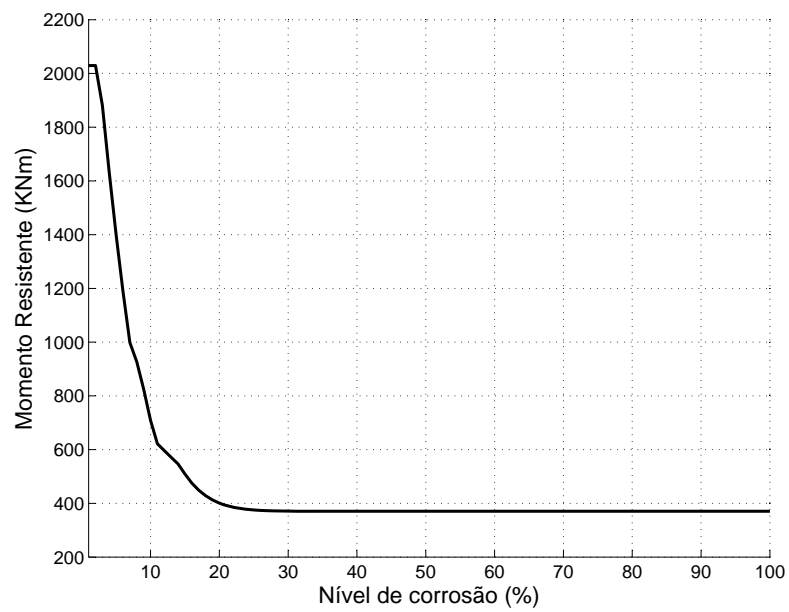


Figura 4.10: Momento resistente Vs Nível de corrosão (%)

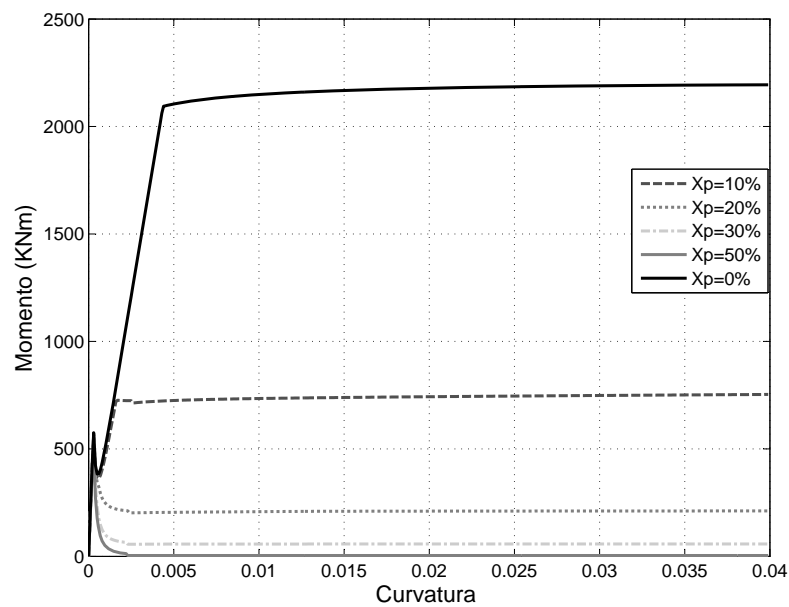


Figura 4.11: Momento resistente Vs Curvatura, com varios niveis de corrosão

### 4.3 Implementação

Na figura 4.12 é apresentado o fluxograma do modelo numérico implementado no programa Matlab para o cálculo do momento resistente.

Este programa calcula o valor do momento resistente ( $M_R$ ), para qualquer nível de corrosão ( $X_p$ ). O cálculo do momento resistente e consequentemente da linha neutra e das forças existentes na secção transversal são executados pela aplicação das fórmulas apresentadas anteriormente.

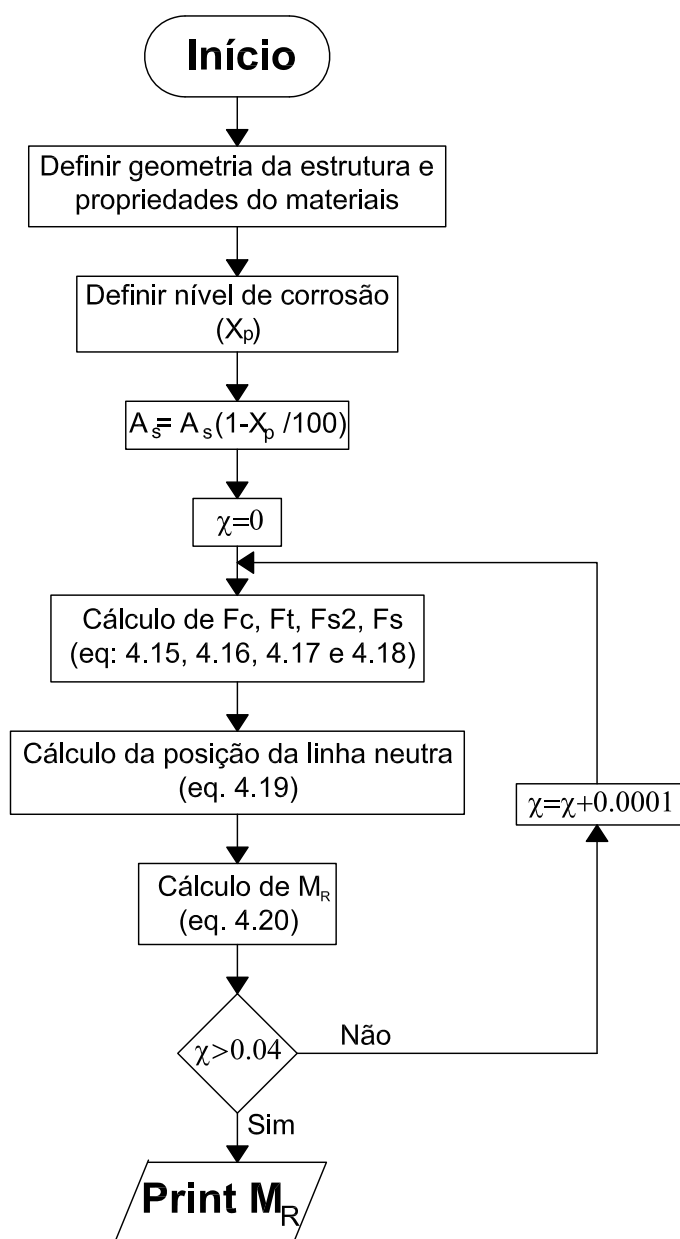


Figura 4.12: Fluxograma do cálculo do Momento Resistente

# Capítulo 5

## Análise da segurança estrutural

### 5.1 Aspectos gerais

Como apresentado anteriormente, as análises probabilísticas permitem quantificar a segurança estrutural. Neste capítulo será analisada a segurança estrutural de uma laje e de uma viga de betão armado, aplicando o modelo desenvolvido em MatLab referido anteriormente e utilizando métodos de simulação. O primeiro exemplo é baseado numa análise apresentada no Probabilistic Model Code [Vrouwenvelder, 2001] e o segundo baseia-se numa análise por elementos finitos apresentada por Cavaco et al., 2010 [Cavaco et al., 2010].

A análise da segurança estrutural é realizada considerando níveis de corrosão variando entre a inexistência de corrosão e armaduras completamente corroídas.

### 5.2 Análise de segurança de uma laje de betão armado

#### 5.2.1 Descrição da estrutura

A estrutura é constituída por uma laje simplesmente apoiada com um vão de 5 metros e uma espessura de 0.20 metros (Figura 5.1). A laje suporta uma carga permanente ( $g$ ) e uma sobrecarga ( $q$ ). Na carga permanente é considerado uma espessura uniforme de 0.25 metros que inclui a espessura da laje e as camadas do pavimento, o valor da sobrecarga considerado, simula uma área de escritórios.

As variáveis aplicadas no modelo seguem a recomendação do JCSS Probabilistic Model Code. A área de armadura e o vão são considerados determinísticos, enquanto a altura da laje, o recobrimento, a tensão de rotura do betão, a tensão de cedência do

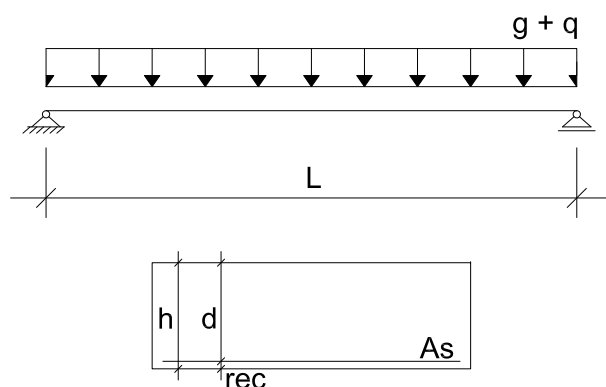


Figura 5.1: Vão de uma laje simplesmente apoiada e a sua secção transversal

aço, a densidade do betão a sobrecarga, a carga permanente e os coeficientes associados às incertezas são considerados aleatórios.

### Propriedades dos Materiais

Para a armadura e de acordo com o JCSS a tensão de cedência do aço considerada, têm um desvio padrão de  $\sigma = 30MP_a$  e uma média igual à soma da mínima tensão de cedência do aço mais duas vezes o desvio padrão, logo a média é  $\mu = 500 + 2 \times 30 = 560MP_a$ , assumindo-se uma distribuição lognormal (tabela 5.1).

Para o betão considerou-se um modelo com uma tensão de rotura à compressão com uma média de  $\mu = 30MP_a$  e um desvio padrão de  $\sigma = 5MP_a$ , e uma distribuição lognormal (tabela 5.1). Em relação à tensão de rotura à tracção considerou-se que o betão tem uma resistência de  $3 MP_a$ .

Tabela 5.1: Tensões de cedência do betão e aço

Variáveis	Símbolos	Tipo de distribuição	Dimensão	Média	Desvio padrão	V
tensão de rotura do betão à compressão	$f_c$	lognormal	$MP_a$	30	5	0.17
tensão de cedência do aço	$f_y$	lognormal	$MP_a$	560	30	0.05

Sabendo que os parâmetros que caracterizam o betão são variáveis aleatórias correlacionadas, considerou-se como variáveis independentes a resistência à compressão,  $f_c$ . O módulo de elasticidade,  $E_c$  e a extensão do betão,  $\varepsilon_{c1}$ , são definidas como variáveis, variando linearmente com a resistência à compressão, entre os valores apresentados na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Classes de resistência do betão (adoptado do Eurocódigo 2)

Classe	$f_{cm}$ (MPa)	$\epsilon_{c1}$ (‰)	$E_{cm}$ (GPa)
<b>C12/15</b>	20	1.8	27
<b>C16/20</b>	24	1.9	29
<b>C20/25</b>	28	2.0	30
<b>C25/30</b>	33	2.1	31
<b>C30/37</b>	38	2.2	33
<b>C35/45</b>	43	2.25	34
<b>C40/50</b>	48	2.3	35
<b>C45/55</b>	53	2.4	36
<b>C50/60</b>	58	2.45	37

### Geometria da laje

A laje tem um vão de 5 metros e considera-se em termos de cálculo uma largura por metro de desenvolvimento. O recobrimento da laje é definido na secção 3.10 parte II do JCSS, considerando-se que o recobrimento pode ser caracterizado por uma distribuição gamma, com média igual a  $\mu = 0.05$  e desvio padrão igual a  $\sigma = 0.005m$ . A altura da laje tem uma altura média de  $\mu = 0.2m$  e um desvio padrão de  $\sigma = 0.005m$ , e uma distribuição normal (tabela 5.3). A armadura da laje no modelo proposto pelo JCSS é calculada para vários níveis de armadura, neste trabalho optou-se em calcular as áreas de armadura apenas para três níveis de rácio ( $R=0.20, 0.35, 0.50$ ).

Tabela 5.3: Características da laje

Variáveis	Símbolos	Tipo de distribuição	Dimensão	Média	Desvio padrão	V
Vão	L	determin.	m	5	-	-
Largura	b	determin.	m	1	-	-
Altura da laje	h	normal	m	0.2	0.005	0.025
Recobrimento	c	gamma	m	0.05	0.005	0.17
Área de armadura	$A_s$	determin.	$m^2$	$Rb(h - c)$	-	-

### Carga permanente e sobrecargas

As acções aplicadas à laje são a carga permanente e a sobrecarga, dividida numa parcela de curto prazo e outra a longo prazo (tabela 5.4).

O modelo considerado para o peso próprio da laje encontra-se definido no JCSS parte I secção 2.1.4, considerando-se que a densidade do betão pode ser caracterizada

Tabela 5.4: Peso próprio e sobrecargas

Variáveis	Símbolos	Tipo de distribuição	Dimensão	Média	Desvio padrão	V
Densidade do betão	$\gamma_{con}$	normal	$MN/m^3$	0.025	0.00075	
Carga permanente	$q_{lt}$	gamma	$kN/m^2$	0.5	0.75	1.5
Sobre carga	$q_{st}$	exponenc.	$kN/m^2$	0.2	0.46	2.3

por uma distribuição normal, com média igual a  $\mu = 0.025MN/m^3$  e desvio padrão igual a  $\sigma = 0.00075MN/m^3$ .

Seguindo as recomendações do JCSS para áreas de escritórios, considera-se que, a média para a carga a longo prazo é de  $\mu = 0.5kN/m^2$  e o desvio padrão é de  $\sigma(v) = 0.3kN/m^2$  e  $\sigma(u) = 0.6kN/m^2$ , considera-se uma área de referência de  $A_0 = 20m^2$  e uma área de influência de  $A = 30m^2$ . O factor  $\kappa$  para áreas de escritórios é igual a 2. Seguindo a cláusula 2.2.2 do JCSS o desvio padrão para a sobrecarga a longo prazo é dada por:

$$\sigma(q_{lg}) = \sqrt{\sigma(v)^2 + \sigma(u)^2 \frac{A_0}{A} \kappa} = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2 \frac{20}{30} 2} = 0.75kN/m^2 \quad (5.1)$$

A carga a curto prazo considerada tem uma média  $\mu = 0.2kN/m^2$  e um desvio padrão de  $\sigma(u) = 0.4kN/m^2$ . Seguindo novamente o código JCSS o desvio padrão a curto prazo é dado pela equação 5.2.

$$\sigma(q_{lg}) = \sqrt{\sigma(u)^2 \frac{A_0}{A} \kappa} = \sqrt{0.4^2 \frac{20}{30} 2} = 0.46kN/m^2 \quad (5.2)$$

### Incertezas dos modelos

As incertezas dos modelos  $\theta_R$  e  $\theta_E$  (tabela 5.5) são variáveis aleatórias para compensar as incertezas e imprecisões dos modelos teóricos da resistência e do carregamento, respectivamente.

Os modelos considerados para caracterizar a incerteza dos modelos são descritos secção 3.9 do JCSS. O modelo de incertezas da resistência  $\theta_R$  têm uma média de  $\mu = 1.1$  e um desvio padrão de  $\sigma = 0.077$ , já o modelo da incerteza do efeito de carga têm uma média  $\mu = 1$  e um desvio padrão de  $\sigma = 0.2$ , distribuição lognormal [Ellingwood and Dusenberry, 2005].



Tabela 5.5: Coeficientes de incertezas

Variáveis	Símbolos	tipo de	Dimensão	Média	Desvio	V
Incerteza da resistência	$\theta_R$	lognormal	-	1.1	0.077	0.07
Incerteza do efeito das acções	$\theta_E$	lognormal	-	1.0	0.2	0.2

### 5.2.2 Análise de fiabilidade Estrutural

Para efectuar uma análise de fiabilidade estrutural é necessário calcular a probabilidade de rotura e o índice de fiabilidade  $\beta$ . Para tal utiliza-se o método de simulação Monte Carlo, implementado no programa Matlab. Na figura 5.2 esta representado o fluxograma do algoritmo utilizado.

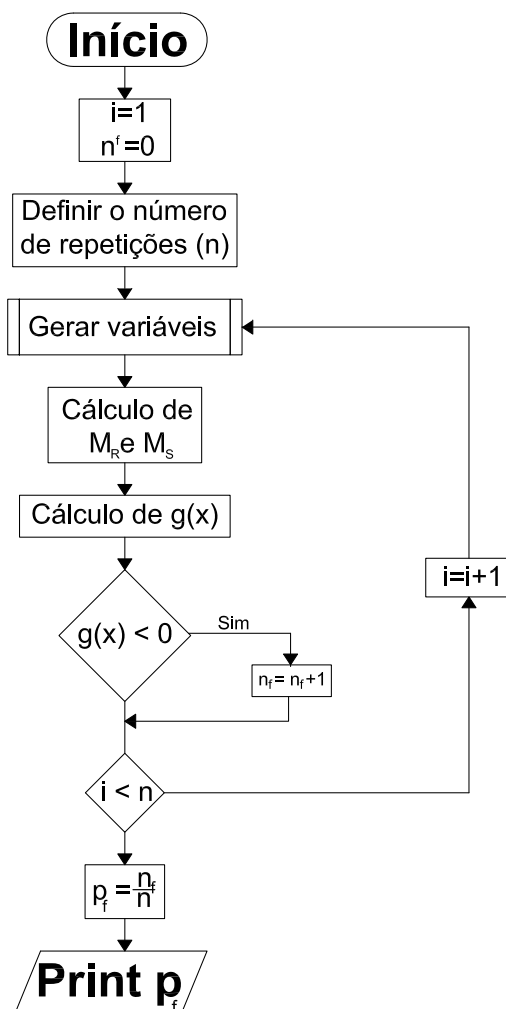


Figura 5.2: Fluxograma do algoritmo de Monte Carlo

Como se indica no fluxograma, primeiramente foram determinadas as variáveis aleatórias das tabelas anteriormente apresentadas. Para a geração das variáveis aleatórias utilizou-se o método LHS. O momento resistente ( $M_R$ ) também é uma variável aleatória e é representado por:

$$M_R = M_R \times \theta_R \quad (5.3)$$

O momento actuante ( $M_E$ ) é calculado da seguinte forma:

$$M_E = \frac{P \times L^2}{8} \times \theta_E \quad (5.4)$$

onde,

$$P = q_{lt} + q_{st} + \gamma_{con} \times 0.25$$

Por fim é necessário definir a função limite ( $g(x)$ ) que é constituída pela diferença entre o momento resistente e o momento actuante.

$$g(x) = M_R - M_E \quad (5.5)$$

Cada vez que  $g(x) < 0$  ocorre a rotura da estrutura. O programa calcula num ciclo de  $n$  vezes, quantas vezes ocorre a rotura. A probabilidade de rotura ( $p_f$ ) é então calculada como o número de vezes que ocorre a rotura sobre o número de ciclos.

O índice de fiabilidade  $\beta$  é dado pela distribuição normal cumulativa inversa da probabilidade de rotura, ou seja, pela equação 2.14.

Na tabela 5.6 esta representado a probabilidade de rotura e o índice de fiabilidade para diferentes números de ciclos.

Tabela 5.6: Probabilidade de Rotura e índice de fiabilidade

nº ciclos	$p_f$	$\beta$
100	0.01	2.33
1000	0.002	2.88
10000	0.0024	2.82
50000	0.0031	2.74
100000	0.0029	2.75
200000	0.0028	2.77

Como se pode verificar pela análise da tabela 5.6 a probabilidade de rotura e o índice de fiabilidade tendem para um valor, à medida que se aumenta o número de ciclos, ou seja, para o método de simulação Monte Carlo quanto maior for o número de ciclos melhor será a precisão obtida e até quando este número de ciclos tende para

infinito têm-se uma aproximação exacta.

O cálculo do momento resistente  $M_R$  a partir do algoritmo e equações representado no capítulo 4, que têm em conta a não linearidade física dos materiais, impõe um grande esforço computacional. Portanto, não é possível efectuar-se um grande número de amostras. De maneira a contornar o problema considerou-se que o momento resistente podia ser aproximado por uma distribuição probabilística.

Assim numa primeira abordagem calcula-se a distribuição probabilística para o momento resistente  $M_R$  para cada nível de corrosão. Para este cálculo foi efectuado um ciclo de 1000 análises onde se obtêm as médias e desvios padrões apresentados na tabela 5.7.

Tabela 5.7: Exemplo de média e desvio padrão para um rácio de 0.20 e para alguns níveis de corrosão

Nível de Corrosão (%)	Média	Desvio Padrão	Coefficiente de Variação
0	24.37	2.48	0.10
0.5	24.37	2.48	0.10
1	24.38	2.48	0.10
1.5	24.38	2.48	0.10
2	22.93	2.11	0.09
2.5	22.13	1.78	0.08

Na figura 5.3 está representado um histograma do momento resistente associado à inexistência de corrosão e para uma área de armadura com um rácio de 0.20%, para um ciclo de 1000 análises e para a distribuição probabilística considerada. A distribuição é definida por uma média e desvio padrão (quadro 5.7) e é distribuída por uma função lognormal.

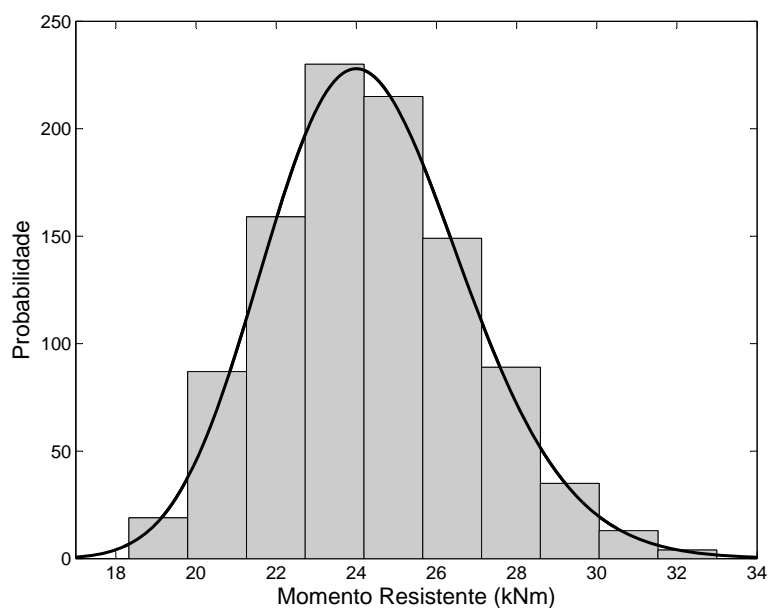


Figura 5.3: Histograma do Momento Resistente para um nível de corrosão de 0%

Para verificar se o momento resistente segue a distribuição considerada, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 5.8.

Tabela 5.8: K-S Teste para a variável  $M_r$

Variável	H	P	KS
Momento Resistente ( $M_R$ )	0.000	0.679	0.032

No K-S teste admite-se que a distribuição da qual provém a amostra ( $F_n(x)$ ) é idêntica à função de distribuição que se assume ( $F(x)$ ). Assim, a hipótese nula ( $H = 0$ ) corresponde a  $H_0 : F_n(x) = F(x)$  e a hipótese alternativa ( $H = 1$ ) corresponde a  $H_1 : F_n(x) \neq F(x)$ .

A partir do resultado positivo do teste K-S e da observação da figura 5.3 é possível concluir-se que a distribuição probabilística considerada para o momento resistente é uma boa aproximação. Assim com esta aproximação é possível gerar um grande número de análises sem se ter um esforço computacional exagerado, e por sua vez efectuar a simulação Monte Carlo com uma precisão adequada.

### 5.2.3 Robustez estrutural

A robustez estrutural pode ser quantificada pela abordagem de Cavaco [Cavaco, 2009], apresentada anteriormente. A robustez é quantificada pela equação 2.36. Onde a resposta da estrutura considerada será o índice de fiabilidade  $\beta$  e o dano será a corrosão  $X_p$ . Normalizando estes dois parâmetros para os três níveis de armadura obtém-se o diagrama 5.4.

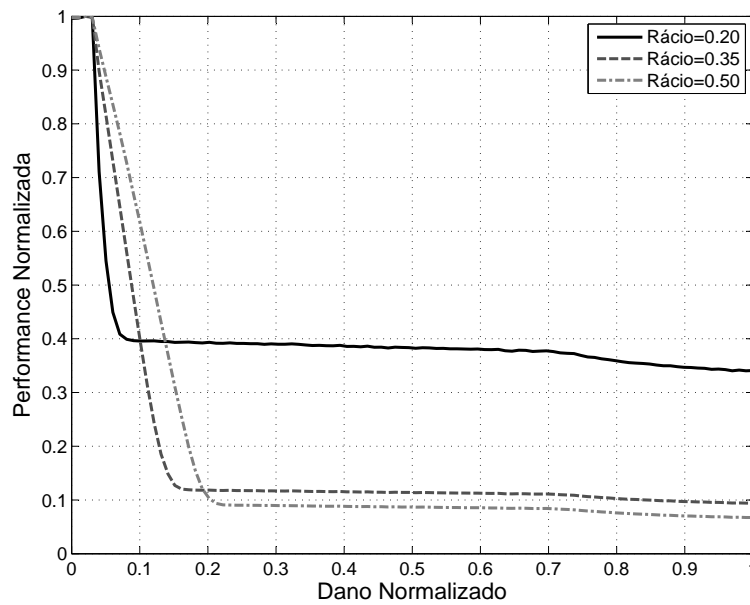


Figura 5.4: Normalização dos parâmetros  $\beta$  e  $X_p$

A partir da equação 2.36 determina-se o valor da robustez estrutural para cada área de armadura.

$$R_d(0.20) = 0.41 \quad (5.6)$$

$$R_d(0.35) = 0.19 \quad (5.7)$$

$$R_d(0.50) = 0.19 \quad (5.8)$$

Como era de prever o índice de robustez diminui com o aumento da área de armadura, pois para armaduras mais elevadas existe uma maior perda de resistência no intervalo de estado não corroído ao estado totalmente corroído.

### 5.2.4 Resultados

Os primeiros resultados obtidos foram as distribuições dos momentos resistentes para cada nível de corrosão e para um rácio de armadura de 0.2%, 0.35% e 0.50%. Na figura 5.5 está representado a média de cada distribuição para cada nível de corrosão.

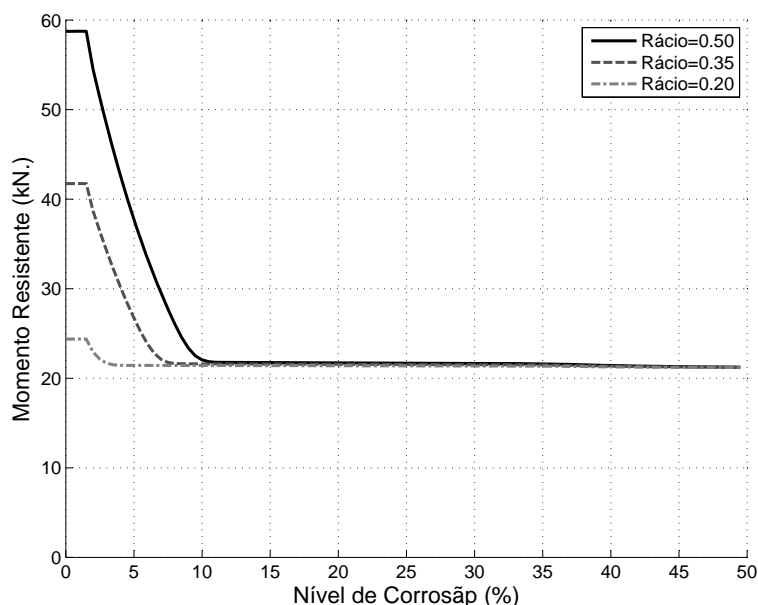


Figura 5.5: Momento Resistente vs Nível de Corrosão

Como era de esperar quanto maior for o rácio da armadura maior será o momento resistente da laje. A figura 5.5 demonstra que as curvas do momento resistente quando chegam a um determinado nível de corrosão estabilizam e não perdem mais resistência. Este factor é verificado para todos os níveis de armadura, sendo que todos convergem para o mesmo valor embora em diferentes níveis de corrosão. Tal acontecimento acontece porque a partir de um determinado nível de corrosão só o betão é que contribui para a resistência da laje, e visto que se trata da mesma laje só com diferentes armaduras é normal que os três ensaios tendem para o mesmo valor.

Para o rácio de 0.20% aproximadamente a partir do nível de corrosão de 4.5% o aço perde praticamente total adesão ao betão. Já para o rácio de 0.35% a perda da contribuição do aço para a resistência da laje é aproximadamente no nível de corrosão de 7.5%. Para o rácio de 0.50% o nível de corrosão passa para os 11%. Com esta análise conclui-se que para estruturas com níveis de taxa de armadura baixas a corrosão inicial é muito condicionante e, poderão existir roturas frágeis na estrutura. Ao contrario das estruturas com níveis de taxa de armadura mais elevadas que apesar de a corrosão inicial trazer a maior queda da resistência da laje, esta aguenta níveis de corrosão superiores. Assim pode-se dizer que para estruturas com taxas de armaduras baixas

existe a necessidade de existir um controlo e/ou manutenção mais rigorosa, pois níveis de corrosão muito baixos podem trazer ao colapso da mesma.

No documento JCSS [Vrouwenvelder, 2001] foi apresentado como exemplo o cálculo do índice de fiabilidade da mesma laje analisada anteriormente para vários níveis de rácio. Os resultados foram obtidos através do software Comrel (1999).

Os resultados obtidos através do programa desenvolvido para a simulação Monte Carlo, correspondem a um rácio de 0.20%, 0.35% e de 0.50%, e conduziram a um índice de fiabilidade para o nível de corrosão igual a zero de respectivamente  $\beta = 0.85$ ,  $\beta = 3.10$  e  $\beta = 4.40$ .

Comparando os resultados obtidos por esta análise com os resultados obtidos no documento JCSS, observa-se que os valores calculados de  $\beta$  são aproximadamente idênticos. Concluindo-se que, o modelo desenvolvido obtém bons resultados em relação ao cálculo da fiabilidade estrutural.

Na figura 5.6 é possível observar a evolução da probabilidade de rotura da laje de um estado não corroído a um estado totalmente corroído. Como se verifica para um nível de corrosão menor que 1.5% não existe um aumento significativo da probabilidade de rotura, pois até este nível foi considerado que só existe a perda de secção do aço e não existe deterioração da força de ligação entre os materiais. Como se verifica as curvas a partir de um determinado momento tendem para um determinado valor, que se encontra fora dos limites considerados seguros. O limite da probabilidade de rotura considerada segura em engenharia civil não pode ultrapassar aproximadamente os  $10^{-3}$  (Capítulo 2.4). Esta é a fase referida anteriormente da contribuição única do betão na resistência da laje, visto que o aço já perdeu aproximadamente total adesão ao betão.

Na figura 5.7 é apresentada a evolução do índice de fiabilidade  $\beta$  para vários níveis de corrosão. O gráfico do índice de fiabilidade têm um aspecto muito similar ao gráfico dos momentos resistente. Apesar disso, os valores apresentados na figura 5.7 combinados com um modelo que prevê o aumento do nível de corrosão nas armaduras ao longo do tempo e comparando os seus valores com os valores mínimos de segurança recomendados pelo EC0 [CEN, 2009] e pelo JCSS [Vrouwenvelder, 2001], que estão representados nas tabelas 2.2 e 2.3, poderá ser muito útil para a previsão da vida útil e segurança de estruturas existentes.

Em termos de robustez estrutural em relação à corrosão, as estruturas com menor

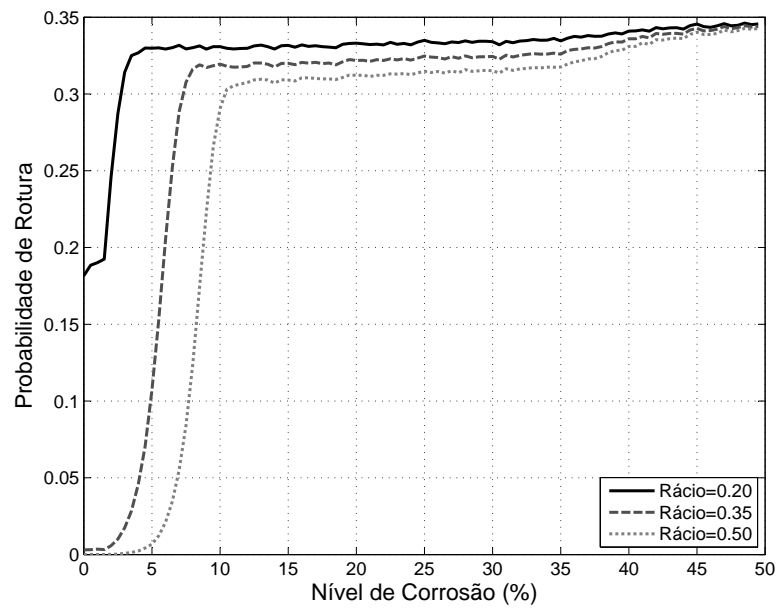


Figura 5.6: Probabilidade de Rotura vs Nível de Corrosão (%)

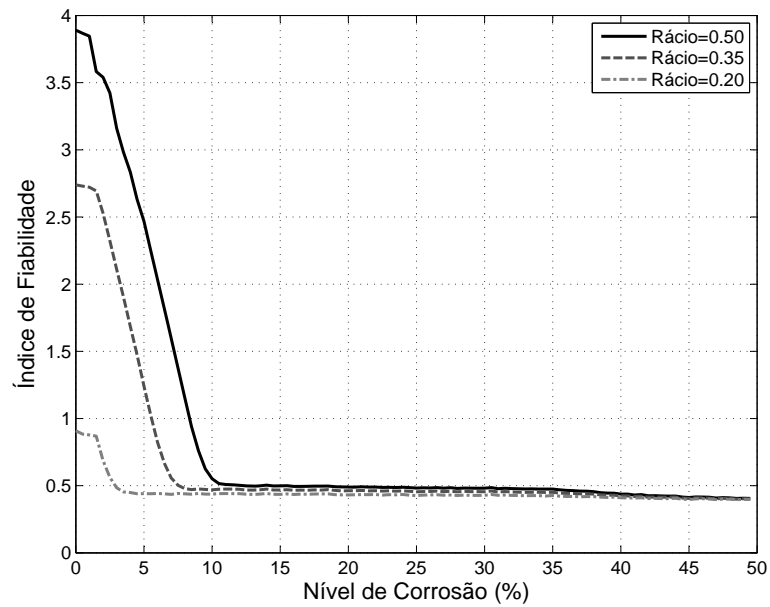


Figura 5.7: Índice de Fiabilidade Estrutural ( $\beta$ ) vs Nível de Corrosão (%)



área de armadura são mais robustas à corrosão. Visto que a corrosão ataca directamente a armadura, uma estrutura com baixos níveis de armadura vai perder pouca resistência estrutural, ao contrário das estruturas com altos níveis de armadura. Se considerar uma estrutura sem qualquer tipo de armadura o seu índice de robustez não irá decrescer com o aumento da corrosão. Neste caso o índice de robustez irá ser máximo tomando o valor de  $R_d = 1$  reflectindo uma tolerância à corrosão de 100%.

Apesar de o aumento de armadura diminuir o índice de robustez, este aumenta o declive das curvas (como se pode verificar na figura 5.4), que por sua vez aumenta a resistência à corrosão inicial, sendo esta a mais condicionante numa estrutura de betão armado.

Assim sendo, é de extrema importância obter uma área de armadura para estruturas sujeitas a corrosão, que tenha em consideração não só o índice de robustez, mas também a corrosão inicial.

## 5.3 Análise de segurança de uma viga de betão armado

### 5.3.1 Caracterização da estrutura

A estrutura é constituída por uma viga de betão armado simplesmente apoiada e está sujeita a uma carga uniforme permanente ( $g$ ) e a uma sobrecarga uniforme ( $q_{st}$ ) (Figura 5.8). A viga tem um vão de cinco metros de comprimento e uma largura de influência de 2 metros. A sobrecarga considerada é resultante da concentração de pessoas e está definida de acordo com Vrouwenvelder (2001).

A viga foi projectada de acordo com o Eurocódigo 2 [CEN, 2010] para o caso de uma ponte pedonal. A viga é composta por uma secção rectangular de dimensões 0.20 por 0.40 metros. A armadura transversal foi sobre projectada considerando-se que está protegida contra a corrosão de modo a simplificar a análise.

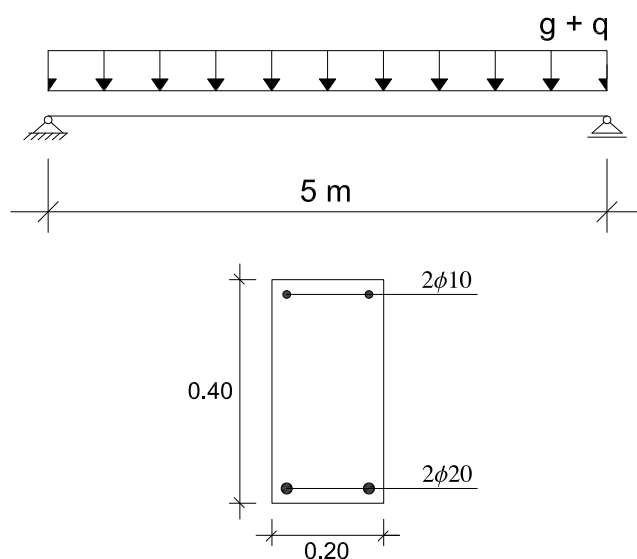


Figura 5.8: Viga de betão armado simplesmente apoiada e a sua secção transversal

### Propriedade dos Materiais

Sobre o ponto de vista da resistência, as propriedades dos materiais, ou seja, a tensão de rotura à compressão do betão e a tensão de cedência do aço, foram caracterizadas como variáveis aleatórias.

Para o betão considerou-se uma distribuição lognormal com uma média  $\mu = 38.5 MPa$  e um coeficiente de variância de 15% (tabela 5.9). A tensão de rotura do betão à tracção considerada foi de  $3.85 MP_a$ .

Para as armaduras foi adoptado o modelo proposto pelo JCSS [Vrouwenvelder, 2001]. A tensão de cedência do aço de acordo com este manual pode ser distribuída por uma distribuição normal definida por uma média dada por:

$$\mu = S_{nom} + 2\sigma_1 \quad (5.9)$$

onde o  $S_{nom}$  é a mínima tensão de cedência do aço, de acordo com a classe do aço, e o  $\sigma_1$  é o desvio padrão geral, é igual a  $30MPa$  (tabela 5.9). Neste trabalho considerou-se um aço de classe S400.

Tabela 5.9: Parâmetros das variáveis aleatórias dos materiais

Variáveis	Símbolos	Tipo de distribuição	Dimensão	Média	Desvio padrão
tensão de rotura do betão à compressão	$f_c$	lognormal	$MPa$	38.5	5.8
tensão de cedência do aço	$f_y$	normal	$MPa$	460	30

### Carga permanente e sobrecargas

Em termos da carga imposta na estrutura, foi considerada que esta está sujeita a um peso próprio ( $g$ ) e uma sobrecarga ( $q_{st}$ ).

De acordo com o código JCSS o peso específico do betão armado pode ser caracterizado por uma distribuição normal com média de  $25kN/m^3$  e um desvio padrão de  $0.75kN/m^3$ .

A sobrecarga considerada é o resultado da concentração de pessoas. O código JCSS recomenda que a carga permanente seja nula e que a sobrecarga intermitente tenha uma distribuição gamma com média de  $1.25kN/m^2$  e desvio padrão de  $2.5kN/m^2$ .

Tabela 5.10: Peso próprio e sobrecargas

Variáveis	Símbolos	Tipo de	Dimensão	Média	Desvio
densidade do betão	$g$	normal	$kN/m^3$	25	0.75
sobrecarga	$q_{st}$	gamma	$kN/m^2$	1.25	2.5

### Incertezas dos modelos

Para considerar as incertezas e as imprecisões dos modelos de resistência e das acções, o código JCSS recomenda dois factores. A incerteza para o modelo da resistência ( $\theta_R$ )

é distribuído por uma função lognormal com média 1.2 e uma variância de 0.15. A incerteza para o efeito das acções ( $\theta_S$ ) é distribuído por uma função lognormal com uma média 1.0 e um coeficiente de variação de 0.10.

Tabela 5.11: Coeficientes de incertezas

Variáveis	Símbolos	Tipo de distribuição	Dimensão	Média	Desvio
incerteza da resistência	$\theta_R$	lognormal	-	1.2	0.15
incerteza do efeito das acções	$\theta_E$	lognormal	-	1.0	0.10

### 5.3.2 Fiabilidade e Robustez Estrutural

Para a análise da fiabilidade e da robustez estrutural consideram-se as variáveis aleatórias descritas anteriormente e será utilizado o modelo e algoritmo descrito na secção 5.2.2.

Para se quantificar a fiabilidade calcula-se a probabilidade de rotura e o índice de fiabilidade, utilizando-se novamente a simulação Monte Carlo apresentado pelo fluxograma 5.2, o número de simulações foi de  $n = 10^5$ .

A função estado limite é definida pela diferença entre o momento resistente e o momento actuante e quando este valor é negativo ocorre uma rotura (equação 5.5).

O cálculo do momento actuante não exige um grande esforço computacional pois, este é composta pelas variáveis aleatórias definidas anteriormente, sendo calculado pela seguinte expressão:

$$M_E = \frac{P \times L^2}{8} \quad (5.10)$$

onde,  $P = (g \times h \times b + q_{st} \times L) \times \theta_E$ . A largura de influência, L, foi considerada como determinística e têm como valor dois metros. b e h são respectivamente a base e altura da viga que, neste caso considerou-se uma viga rectangular de  $0.20 \times 0.40$  m.

Ao contrário do momento actuante, o momento resistente não pode ser definido por uma simples função, devido à complexidade do seu cálculo. Consequentemente, similar ao exemplo anterior, é necessário aproximar o momento resistente a uma distribuição probabilística. Foram executadas novamente 1000 análises a partir do algoritmo e equações representadas no capítulo 4 para cada nível de corrosão. Obtém-se assim as médias e desvios padrões de cada nível. Por último a distribuição probabilística

é caracterizada por uma função lognormal definida pelas médias e desvios padrões calculados.

Em semelhança ao caso anterior existe a necessidade de se utilizar o teste K-S para se verificar se a distribuição considerada para o momento resistente é uma boa aproximação. Na tabela 5.12 está representado o teste para o momento resistente com um nível de corrosão de 0%.

Tabela 5.12: K-S Teste para a variável  $M_r$

Variável	H	P	KS
Momento Resistente ( $M_R$ )	0.000	0.855	0.027

Os resultados dos teste K-S são positivos ( $H=0$ ), como se pode verificar pela tabela 5.12, ou seja, a distribuição é caracterizada por uma média e desvio padrão, considerada para o momento resistente é idêntica à distribuição proveniente da amostra. Assim é possível novamente utilizar-se a simulação Monte Carlo com um adequado rigor.

O índice de fiabilidade estrutural  $\beta$  é dado pela distribuição cumulativa inversa da probabilidade de rotura (equação 2.14).

A robustez pode ser quantificada de acordo com a equação 2.36. A performance da estrutura escolhida foi o índice de fiabilidade  $\beta$  e o dano considerado foi a corrosão nas armaduras de 0 a 100%. Normalizando ambos os parâmetros, é possível calcular o índice de robustez.

### 5.3.3 Resultados

Na figura 5.9 está representado a probabilidade de rotura da viga de um estado não corroído ( $X_p = 0\%$ ) a um estado totalmente corroído ( $X_p = 100\%$ ). Como se verifica para um nível de corrosão inferior a 1.5% a probabilidade de rotura cresce lentamente, devido à redução da área efectiva. Como na análise anterior a perda da força de aderência dos materiais é só tida em conta a partir dos 1.5% de corrosão. É a partir deste nível que se observa o grande aumento da probabilidade de rotura, verificando-se que a viga tem o grande aumento da probabilidade de rotura nos níveis de corrosão iniciais, ou seja, entre os 1.5% e os 13%. A probabilidade de rotura não varia a partir de uma taxa de corrosão superior a 40%.

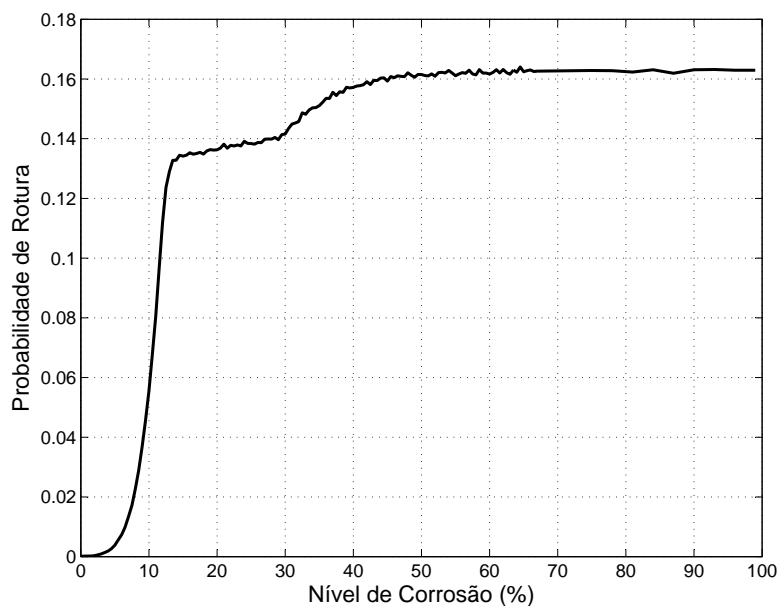


Figura 5.9: Probabilidade de Rotura vs Nível de Corrosão

Na figura 5.10 está representado o índice de fiabilidade estrutural  $\beta$ . Tal como observado para a probabilidade de rotura, e pelos mesmos motivos o índice de fiabilidade é constante até ao nível de corrosão de 1.5%. Sabendo que os índices de fiabilidade admissíveis para uma estrutura são sempre superiores a 3, a corrosão inicial é muito condicionante. Pois, como se verifica, mesmo antes dos 10% de corrosão a viga tem valores de índice de fiabilidade inferiores ao limite admissível.

Normalizando o dano (nível de corrosão) e a performance da viga (índice de fiabilidade), obtém-se a figura 5.11.

A robustez pode ser quantificada, calculando a área que se encontra abaixo da curva normalizada. O índice de robustez obtido é de  $R_d = 0.326$ . Este índice é uma percentagem média do índice de robustez da estrutura no estado intacto, considerando que a estrutura foi submetida a uma profundidade de corrosão de 0% a 100%.

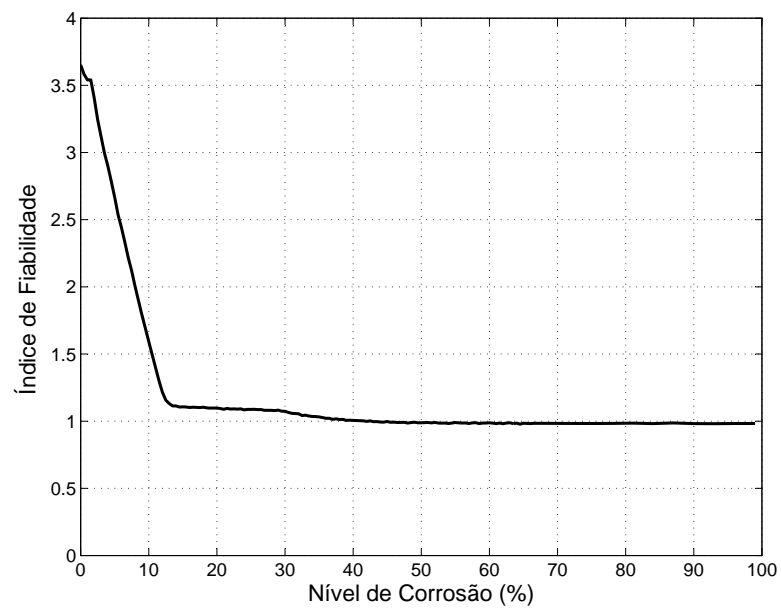
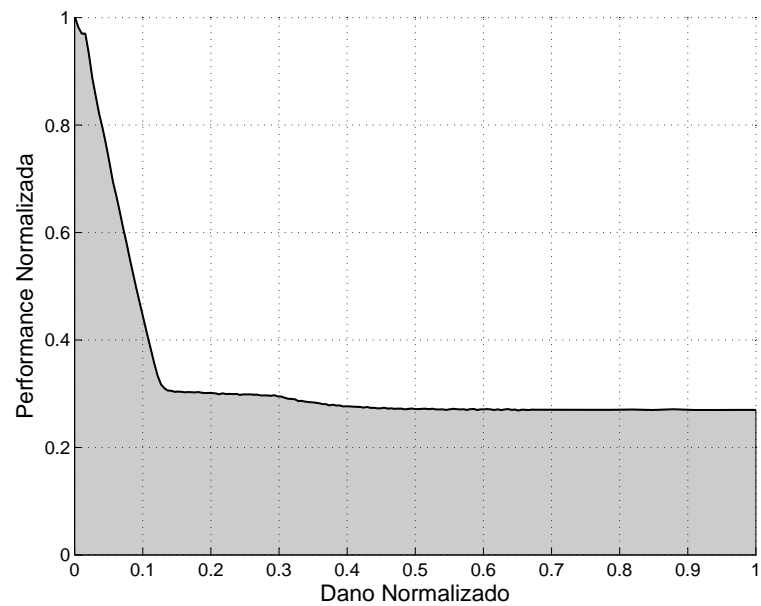
Figura 5.10: Índice de Fiabilidade  $\beta$  vs Nível de Corrosão (%)

Figura 5.11: Performance Normalizada vs Dano Normalizado

No documento Cavaco et al., 2010 foi apresentado como exemplo o cálculo da robustez desta mesma viga analisada.

Os resultados apresentados foram calculados por um modelo de elementos finitos muito complexo, onde se considera a expansão dos produtos corrosivos, e consequente fendilhação e separamento do betão. Também é considerado o efeito da perda da força de aderência e a redução da área efectiva das armaduras. Devido a estas considerações o número de variáveis aleatórias é muito limitado. O resultado obtido para o índice de robustez é de  $R_d = 0.48$ .

Se admitir que o resultado obtido pelo modelo de elementos finitos é o valor exacto para o índice de robustez, o modelo desenvolvido nesta tese é um modelo conservativo, devido a se ter utilizado um modelo mais simples para simular a corrosão. Apesar disso, o modelo desenvolvido tem uma grande simplicidade de uso em comparação ao modelo de elementos finitos e não têm um limite de variáveis aleatórias.

De modo a reforçar as conclusões obtidas em 5.2, onde se concluiu que o aumento da área de armadura traz a redução da robustez estrutural em relação à corrosão, aumentou-se a área de armadura da viga em 25%, 50%, 75% e 100% da área inicial considerada.

A figura 5.12 representa os resultados obtidos destes incrementos de armadura.

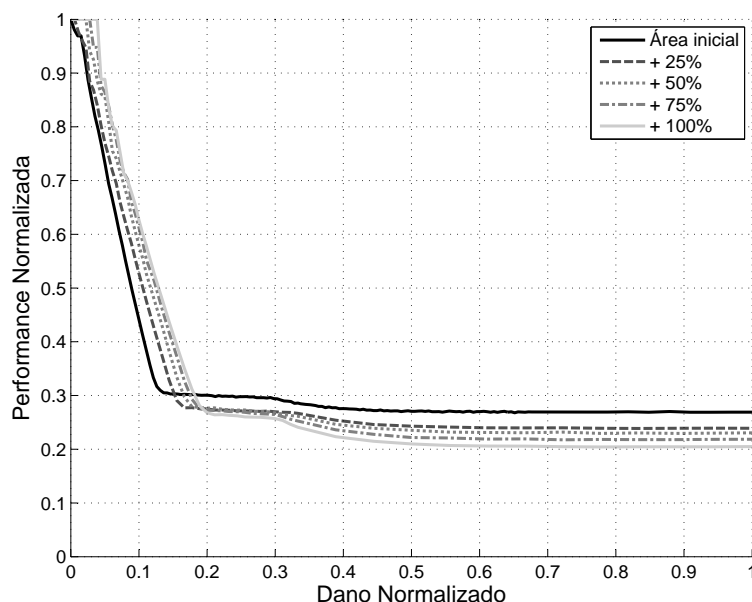


Figura 5.12: Índice de Robustez para vários níveis de armadura



Os índices de robustez obtidos para cada incremento da área de armadura são os seguintes:

$$R_d(inicial) = 0.326 \quad (5.11)$$

$$R_d(+25\%) = 0.313 \quad (5.12)$$

$$R_d(+50\%) = 0.311 \quad (5.13)$$

$$R_d(+0.75\%) = 0.310 \quad (5.14)$$

$$R_d(+100\%) = 0.302 \quad (5.15)$$

De facto estes resultados estão em concordância com os resultados anteriores, onde o índice de robustez estrutural,  $R_d$ , diminuiu com o aumento da área de armadura. Mas também em semelhança com os resultados anteriores, a viga com o aumento da área de armadura ganha mais resistência à corrosão inicial. Ou seja, comparando a viga inicial (viga A) com a viga com mais 100% de armadura (viga B), para um nível de corrosão de 10%, a viga A tem cerca de 42% de resistência estrutural restante, e a viga B para o mesmo nível de corrosão tem ainda cerca de 62% de resistência restante.

Tendo em conta que a corrosão inicial é sempre a mais condicionante para este tipo de estruturas, mesmo antes dos 10% de corrosão as estruturas já perderam a sua fiabilidade estrutural, este índice de robustez não é adequado, pois referir que uma estrutura é mais robusta que outra, apesar da outra manter durante maiores níveis de corrosão a sua fiabilidade estrutural, não é correcto.

Devido a isso é importante propor um índice de robustez estrutural que tenha em conta a corrosão inicial e não a corrosão total.

De modo a analisar o efeito de cada modelo utilizado na simulação da corrosão, analisou-se novamente a viga referida anteriormente, mas desta vez considerou-se dois novos modelos para o cálculo do momento resistente.

Um modelo tem em conta unicamente a deterioração da força de ligação e o outro a redução da secção transversal do aço. Na figura 5.13 poder-se-à interpretar os resultados obtidos.

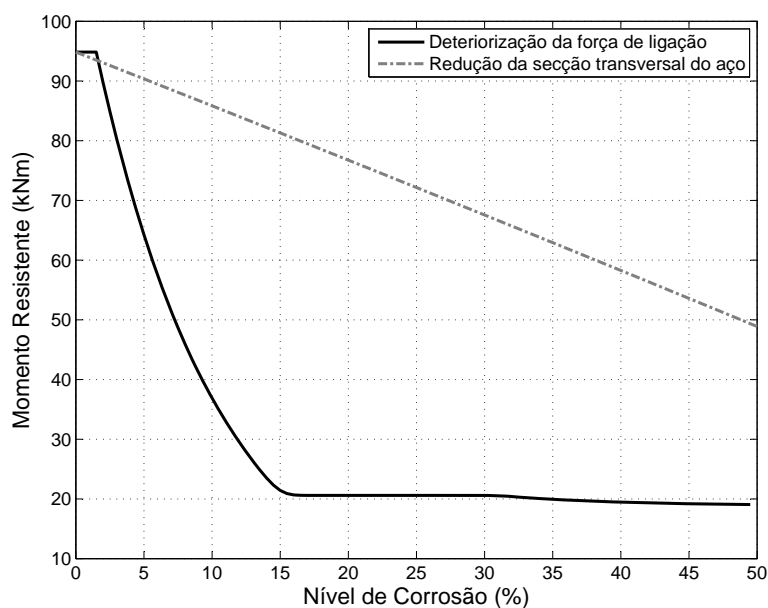


Figura 5.13: Efeito dos modelos utilizados na simulação da corrosão na capacidade resistente de um elemento de betão armado

O eixo das abcissas representa o nível de corrosão para um intervalo de 0 a 50% e o eixo das ordenadas representa o momento resistente da viga de betão armado.

Com a análise da figura 5.13 conclui-se que a deterioração da força de ligação é sempre condicionante, excepto para níveis de corrosão inferiores a 1.5%, pois para esses níveis não se considera que exista perda da força de ligação.

# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1 Considerações finais

Nesta dissertação procurou-se desenvolver um modelo analítico para analisar a segurança estrutural de um elemento de betão armado danificado pela acção da corrosão.

Numa primeira fase foi desenvolvido um modelo analítico no programa de cálculo Matlab, este permite calcular o momento resistente de uma secção transversal para vários níveis de corrosão. Os efeitos considerados para simular a corrosão foram a perda de aderência entre os materiais aço e betão e a redução da área efectiva da secção dos varões.

Numa segunda fase procurou-se estudar a segurança e a robustez estrutural de uma laje e de uma viga simplesmente apoiada em relação à corrosão. Este estudo foi realizado através de uma simulação probabilística pelo método de simulação Monte Carlo. As propriedades do betão e das solicitações foram definidos por parâmetros estatísticos e respectivas distribuições matemáticas propostas pelo JCSS [Vrouwenvelder, 2001].

Através da geração de amostras aleatórias foi calculada a probabilidade de rotura, o índice de fiabilidade e o índice de robustez para a laje e a viga. Devido ao grande esforço computacional no cálculo do momento resistente foi necessário fazer-se uma aproximação deste a uma função de distribuição para cada nível de corrosão. Pelo teste Kolmogorov-Smirnov foram validadas as aproximações.

Com a análise dos resultados conclui-se que:

1. A corrosão é mais condicionante para níveis de corrosão inferiores a 10%, já que para estes valores ocorre uma redução da capacidade resistente de um elemento de betão armado igual a 50%.

2. A perda de aderência entre aço e betão é mais condicionante que a perda de secção transversal do aço. Para um nível de corrosão aproximado de 7.5% a perda de aderência condiciona a estrutura em cerca de 50% em termos de resistência estrutural.
3. Os níveis de corrosão baixos podem trazer colapsos estruturais frágeis. Existe uma necessidade premente de inspecções e relatórios periódicos, durante a vida útil de uma estrutura que, esteja situada em zonas com grandes concentrações de cloretos e de dióxido de carbono.
4. Uma função lognormal é uma boa aproximação do comportamento resistente de uma viga ou laje de betão armado.
5. A partir de um certo nível de corrosão, todos os elementos de betão armado deixam de perder resistência estrutural. Isto sucede pois, a partir deste nível, a resistência do elemento provém unicamente do betão, ou seja, as armaduras já perderam qualquer força de adesão com o betão.
6. O cálculo do índice de fiabilidade  $\beta$  permite quantificar a influência da corrosão na segurança estrutural. Torna-se assim possível avaliar, de um modo consistente, a necessidade de reabilitar a estrutura.
7. Combinando o cálculo do índice de fiabilidade  $\beta$  para vários níveis de corrosão com um modelo que calcule o aumento da corrosão ao longo do tempo, é possível observar-se e estudar o comportamento de uma estrutura ao longo da sua vida útil e, até, mesmo prever a sua vida útil.
8. É possível quantificar a capacidade que uma estrutura tem em sofrer danos devido à corrosão, calculando o índice de robustez,  $R_d$ .
9. O índice de robustez,  $R_d$ , deve ter um limite superior na sua escala de dano em relação à corrosão, de maneira a este ter mais em conta o efeito da corrosão inicial.

## 6.2 Sugestões para futuras pesquisas

As várias pesquisas relacionadas com a temática dos efeitos da corrosão em elementos de betão armado, poderão enriquecer e complementar esta dissertação.

Uma área importante a investigar, futuramente, relaciona-se com os mecanismos de corrosão nas armaduras e os efeitos que estes poderão ter na estrutura ao longo do tempo. Nomeadamente, é importante experimentar outros mecanismos de simulação

da corrosão e, até combiná-los entre si, de modo a obter-se um modelo que calcule a fiabilidade e a robustez estrutural com mais precisão. É importante escolher mecanismos que tenham em conta todas as propriedades de um elemento estrutural, como por exemplo o recobrimento, de modo a se efectuar um estudo para determinar qual as propriedades que influenciam mais a protecção da estrutura contra a corrosão.

Nesta dissertação, apenas se estudou a fiabilidade e robustez estrutural de dois elementos de betão armado. Seria interessante aplicar estas análises a casos estruturais reais já danificados pela corrosão como, pontes ou edifícios de betão armado e, analisar a restante capacidade resistente, concluindo se estes necessitariam de reparações.

Na análise efectuada utilizou-se um índice de robustez estrutural que considera para o seu cálculo níveis de corrosão muito elevados, ou seja este índice estuda a vida de um elemento de betão armado de um estado não corroído a um estado totalmente corroído. Visto que a corrosão inicial é a corrosão condicionamento, é importante propor um índice de robustez estrutural que não tenha em consideração a corrosão total mas sim a corrosão inicial, ou impor um limite neste índice no nível de corrosão máximo a ser utilizado.



# Bibliografia

- [Al-Hammoud et al., 2010] Al-Hammoud, R., Soudki, K., and Topper, T. (2010). Bond analysis of corroded reinforced concrete beams under monotonic and fatigue loads. *Cement and Concrete Composites*, 32(3):194–203.
- [Baker et al., 2008] Baker, J., Schubert, M., and Faber, M. (2008). On the assessment of robustness. *Structural Safety*, 30(3):253–267.
- [Berra et al., 2003] Berra, M., Castellani, A., Coronelli, D., Zanni, S., and Zhang, G. (2003). Steel-concrete bond deterioration due to corrosion: finite-element analysis for different confinement levels. *Magazine of Concrete Research*, 55(3):237–247.
- [Bhargava et al., 2007] Bhargava, K., Ghosh, A., Mori, Y., and Ramanujam, S. (2007). Corrosion-induced bond strength degradation in reinforced concrete-analytical and empirical models. *Nuclear Engineering and Design*, 237(11):1140–1157.
- [Biondini and Restelli, 2008] Biondini, F. and Restelli, S. (2008). Damage propagation and structural robustness. In *Life-Cycle Civil Engineering: Proceedings of the International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering, IALCCE’08, Varenna, Lake Como*, page 131. Taylor & Francis.
- [Bronding et al., 1964] Bronding, W. C., Diederich, F. W., and Parker, P. S. (1964). Structural optimization and design based on a reability design criterion. *J. Spacecraft, Vol. 1, n°1*, pages 55–61.
- [Caldeira, 2007] Caldeira, L. (2007). *Apontamentos da disciplina de Segurança e Dimensionamento de Estruturas*. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.
- [Canisius et al., 2007] Canisius, T., Sørensen, J., and Baker, J. (2007). Robustness of structural systems—a new focus for the joint committee on structural safety (JCSS). In *Proc., 10th Int. Conf. on Application of Statistic and Probability in Civil Engineering (ICASP10)*.

- [Cavaco, 2009] Cavaco, E. S. (2009). Robustness of corroded reinforced concrete structures. *Short Term Scientific Mission, Cost Action TU-0601, Barcelona*, pages 39–40.
- [Cavaco et al., 2010] Cavaco, E. S., Casas, J. R., Neves, L. A. C., and Huespe, A. E. (2010). A reliability-based measure of robustness for concrete structures subjected to corrosion. *Structure and Infrastructure Engineering: Maintenance, Management, Life-Cycle Design and Performance*.
- [CEN, 2009] CEN (2009). Eurocódigo 0 - Bases para o projecto de estruturas. *Brussels (Belgium):Comite European de Normalization 250*.
- [CEN, 2010] CEN (2010). Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão; Part 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. *Brussels (Belgium):Comite European de Normalization 250*.
- [Coronelli, 2002] Coronelli, D. (2002). Corrosion cracking and bond strength modeling for corroded bars in reinforced concrete. *ACI Structural Journal*, 99(3).
- [Ellingwood and Dusenberry, 2005] Ellingwood, B. and Dusenberry, D. (2005). Building design for abnormal loads and progressive collapse. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 20(3):194–205.
- [Faber, 2007] Faber, M. (2007). *Risk and safety in civil engineering*. ETH.
- [fib, 2000] fib (2000). *Bond of reinforcement in concrete, state-of-art report*. Fédération internationale du béton, prepared by Task Group Bond Models.
- [Frangopol and Curley, 1987] Frangopol, D. M. and Curley, J. P. (1987). Effects of damage and redundancy on structural reliability. *Journal of Structural Engineering*, 113(7):1533–1549.
- [Henriques, 1998] Henriques, A. (1998). *Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento do betão estrutural*. Porto, Portugal. Tese Doutoramento, Universidade do Porto, Portugal.
- [Laranja and Brito, 2003] Laranja, R. and Brito, J. (2003). Verificação probabilística da segurança das estruturas. *Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho*.
- [Lee et al., 2002] Lee, H., Noguchi, T., and Tomosawa, F. (2002). Evaluation of the bond properties between concrete and reinforcement as a function of the degree of reinforcement corrosion. *Cement and Concrete research*, 32(8):1313–1318.



- [Li, 2010] Li, J. (2010). *An investigation of behavior and modeling of bond reinforced concrete*. Tese de Doutorado, University of Washington.
- [Lind, 1995] Lind, N. (1995). A measure of vulnerability and damage tolerance. *Reliability engineering & systems safety*, 48(1):1–6.
- [Lundgren, 2005] Lundgren, K. (2005). Bond between ribbed bars and concrete. Part 2: The effect of corrosion. *Magazine of Concrete Research*, 57(7):383–396.
- [Lundgren et al., 2010] Lundgren, K., Kettil, P., Hanjaria, K., Schlunea, H., and Roman, A. (2010). Analytical model for the bond-slip behaviour of corroded ribbed reinforcement. *Structure and Infrastructure Engineering*.
- [McKay et al., 1979] McKay, M., Beckman, R., and Conover, W. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245.
- [Neves, 2001] Neves, L.A.C. e Cruz, P. (2001). Introdução à análise probabilística simplificada da segurança estrutural. *Universidade do Minho. Departamento de Engenharia Civil*.
- [Olsson et al., 2003] Olsson, A., Sandberg, G., and Dahlblom, O. (2003). On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 25(1):47–68.
- [Polito, 2006] Polito, G. (2006). *Corrosão em estruturas de concreto armado: causas, mecanismos, prevenção e recuperação*. Tese de Doutorado, Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas.
- [Rteil, 2007] Rteil, A. (2007). *Fatigue bond behaviour of corroded reinforcement and CFRP confined concrete*. Tese de Doutorado, University of Waterloo.
- [Salta, 2007] Salta, M. (2007). Prevenção da corrosão no betão armado. In *Seminário: Materiais em ambiente marítimo*.
- [Shooman, 1968] Shooman, M. L. (1968). *Probabilistic reability: An engineering approach*. McGraw-Hill (New York).
- [Starossek, 2007] Starossek, U. (2007). Typology of progressive collapse. *Engineering Structures*, 29(9):2302–2307.
- [Starossek and Haberland, 2008] Starossek, U. and Haberland, M. (2008). Measures of structural robustness - requirements and applications. In *Proceedings, ASCE SEI 2008 Structures Congress, Crossing Borders*, Vancouver, Canada.

- [Vinagre, 2004] Vinagre, J. (2004). *Apontamentos da disciplina de Betão Estrutural I*. ESTBarreiro/IPS, Setembro.
- [Vrouwenvelder, 2001] Vrouwenvelder, T. (2001). The JCSS probabilistic model code. *Structural Safety*, 19(3):245–251.
- [Wang and Liu, 2006] Wang, X. and Liu, X. (2006). Bond strength modeling for corroded reinforcements. *Construction and Building Materials*, 20(3):177–186.
- [Wiśniewski, 2007] Wiśniewski, D. (2007). *Safety formats for the assessment of concrete bridges : with special focus on precast concrete*. Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

# Capítulo 7

## Anexos

Nestes anexos serão apresentados as médias e desvios padrões utilizadas na distribuição probabilística do momento resistente. Estes foram obtidos a partir de um ciclo de mil análises para cada nível de corrosão a partir do algoritmo apresentado no capítulo 4. Também serão apresentados os resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov para cada distribuição probabilística.

Tabela 7.1: Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.20

Laje com Rácio = 0.20					
Nível de Corrosão	Momento Resistente		Teste K-S		
	Média	Desvio Padrão	H	P	KS
0	24.37	2.48	0	0.488	0.253
0.5	24.27	2.46	0	0.600	0.232
1	24.17	2.43	0	0.733	0.208
1.5	24.06	2.41	0	0.071	0.391
2	22.93	2.11	0	0.189	0.329
2.5	22.13	1.78	0	0.364	0.279
3	21.68	1.59	0	0.771	0.201
3.5	21.49	1.53	0	0.299	0.295
4	21.45	1.52	0	0.859	0.183
4.5	21.44	1.53	0	0.307	0.293
5	21.43	1.52	0	0.391	0.273
5.5	21.44	1.53	0	0.728	0.209
6	21.43	1.51	0	0.925	0.166

6.5	21.43	1.51	0	0.223	0.317
7	21.43	1.53	0	0.867	0.181
7.5	21.43	1.52	0	0.791	0.197
8	21.43	1.52	0	0.667	0.22
8.5	21.43	1.53	1	0.027	0.445
9	21.42	1.52	0	0.166	0.338
9.5	21.42	1.52	0	0.546	0.242
10	21.42	1.52	0	0.351	0.282
10.5	21.42	1.52	0	0.433	0.264
11	21.42	1.52	0	0.217	0.319
11.5	21.42	1.53	0	0.211	0.321
12	21.42	1.51	0	0.728	0.209
12.5	21.41	1.51	0	0.134	0.352
13	21.41	1.52	0	0.453	0.26
13.5	21.41	1.51	0	0.911	0.17
14	21.41	1.52	0	0.976	0.145
14.5	21.41	1.51	0	0.845	0.186
15	21.41	1.53	0	0.802	0.195
15.5	21.41	1.52	0	0.781	0.199
16	21.41	1.51	0	0.246	0.31
16.5	21.40	1.51	0	0.943	0.16
17	21.40	1.52	0	0.303	0.294
17.5	21.40	1.51	0	0.070	0.392
18	21.40	1.52	0	0.249	0.309
18.5	21.40	1.50	0	0.921	0.167
19	21.40	1.50	0	0.749	0.205
19.5	21.40	1.53	0	0.173	0.335
20	21.39	1.51	0	0.130	0.354
20.5	21.39	1.51	0	0.667	0.22
21	21.39	1.52	0	0.483	0.254
21.5	21.39	1.51	0	0.082	0.383
22	21.39	1.52	0	0.419	0.267
22.5	21.39	1.51	0	0.816	0.192
23	21.39	1.51	0	0.493	0.252
23.5	21.38	1.51	0	0.983	0.14
24	21.39	1.52	0	0.595	0.233
24.5	21.38	1.50	0	0.382	0.275

25	21.38	1.51	0	0.226	0.316
25.5	21.38	1.51	0	0.083	0.382
26	21.38	1.50	0	0.249	0.309
26.5	21.38	1.51	0	0.880	0.178
27	21.37	1.51	0	0.812	0.193
27.5	21.37	1.52	0	0.503	0.25
28	21.37	1.51	0	0.214	0.32
28.5	21.37	1.50	0	0.194	0.327
29	21.37	1.51	0	0.940	0.161
29.5	21.37	1.51	0	0.314	0.291
30	21.37	1.50	0	0.443	0.262
30.5	21.37	1.51	0	0.711	0.212
31	21.36	1.49	0	0.546	0.242
31.5	21.36	1.49	0	0.573	0.237
32	21.36	1.52	0	0.989	0.135
32.5	21.36	1.50	0	0.414	0.268
33	21.36	1.50	0	0.755	0.204
33.5	21.36	1.51	0	0.183	0.331
34	21.35	1.51	0	0.514	0.248
34.5	21.35	1.50	0	0.433	0.264
35	21.35	1.50	0	0.307	0.293
35.5	21.34	1.50	0	0.141	0.349
36	21.34	1.50	1	0.014	0.476
36.5	21.33	1.50	0	0.064	0.397
37	21.32	1.48	0	0.154	0.343
37.5	21.31	1.49	0	0.284	0.299
38	21.30	1.49	0	0.634	0.226
38.5	21.29	1.50	0	0.840	0.187
39	21.28	1.49	0	0.143	0.348
39.5	21.28	1.48	0	0.971	0.148
40	21.27	1.48	0	0.850	0.185
40.5	21.26	1.49	0	0.183	0.331
41	21.26	1.47	0	0.351	0.282
41.5	21.25	1.48	0	0.052	0.409
42	21.24	1.46	0	0.414	0.268
42.5	21.24	1.46	0	0.478	0.255
43	21.24	1.49	0	0.850	0.185

43.5	21.23	1.47	0	0.628	0.227
44	21.23	1.47	0	0.733	0.208
44.5	21.22	1.48	0	0.744	0.206
45	21.22	1.48	0	0.288	0.298
45.5	21.22	1.47	0	0.706	0.213
46	21.21	1.47	0	0.831	0.189
46.5	21.21	1.47	1	0.015	0.474
47	21.21	1.47	0	0.978	0.144
47.5	21.21	1.48	0	0.791	0.197
48	21.20	1.46	0	0.722	0.21
48.5	21.20	1.45	0	0.749	0.205
49	21.20	1.47	0	0.438	0.263
49.5	21.20	1.48	0	0.733	0.208

Tabela 7.2: Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.35

Laje com Rácio = 0.35					
Nível de Corrosão	Momento Resistente		Teste K-S		
	Média	Desvio Padrão	H	P	KS
0	41.73	4.52	0	0.082	0.383
0.5	41.53	4.50	0	0.771	0.201
1	41.33	4.48	0	0.428	0.265
1.5	41.13	4.46	0	0.722	0.21
2	38.68	4.21	0	0.356	0.281
2.5	36.37	3.93	0	0.266	0.304
3	34.20	3.70	0	0.689	0.216
3.5	32.15	3.48	0	0.152	0.344
4	30.22	3.27	0	0.918	0.168
4.5	28.41	3.06	0	0.606	0.231
5	26.72	2.85	0	0.134	0.352
5.5	25.16	2.62	0	0.639	0.225
6	23.82	2.33	0	0.197	0.326
6.5	22.76	2.00	0	0.168	0.337
7	22.11	1.73	0	0.453	0.26

7.5	21.75	1.59	0	0.796	0.196
8	21.64	1.57	0	0.273	0.302
8.5	21.62	1.57	0	0.739	0.207
9	21.61	1.57	0	0.478	0.255
9.5	21.61	1.58	0	0.728	0.209
10	21.60	1.56	0	0.836	0.188
10.5	21.60	1.57	0	0.086	0.38
11	21.60	1.57	0	0.589	0.234
11.5	21.60	1.58	0	0.859	0.183
12	21.59	1.55	0	0.995	0.126
12.5	21.59	1.56	0	0.667	0.22
13	21.59	1.56	0	0.634	0.226
13.5	21.59	1.56	0	0.239	0.312
14	21.59	1.56	0	0.400	0.271
14.5	21.58	1.56	0	0.876	0.179
15	21.58	1.58	0	0.611	0.23
15.5	21.58	1.56	0	0.791	0.197
16	21.58	1.56	0	0.339	0.285
16.5	21.57	1.56	0	0.755	0.204
17	21.57	1.57	0	0.089	0.378
17.5	21.57	1.56	0	0.859	0.183
18	21.57	1.56	1	0.020	0.46
18.5	21.57	1.54	0	0.463	0.258
19	21.56	1.55	0	0.771	0.201
19.5	21.56	1.57	0	0.562	0.239
20	21.56	1.56	0	0.273	0.302
20.5	21.56	1.55	0	0.717	0.211
21	21.55	1.56	0	0.650	0.223
21.5	21.55	1.55	0	0.414	0.268
22	21.55	1.56	0	0.961	0.153
22.5	21.55	1.55	0	0.796	0.196
23	21.54	1.55	0	0.405	0.27
23.5	21.54	1.55	0	0.540	0.243
24	21.54	1.56	0	0.214	0.32
24.5	21.54	1.54	0	0.284	0.299
25	21.53	1.55	0	0.667	0.22
25.5	21.53	1.55	0	0.424	0.266

26	21.53	1.54	0	0.854	0.184
26.5	21.53	1.55	0	0.956	0.155
27	21.52	1.54	0	0.700	0.214
27.5	21.52	1.56	0	0.976	0.145
28	21.52	1.55	0	0.859	0.183
28.5	21.52	1.54	0	0.925	0.166
29	21.52	1.54	1	0.036	0.43
29.5	21.51	1.55	0	0.171	0.336
30	21.51	1.54	0	0.284	0.299
30.5	21.51	1.55	0	0.066	0.396
31	21.51	1.52	0	0.600	0.232
31.5	21.50	1.53	0	0.771	0.201
32	21.50	1.55	0	0.934	0.163
32.5	21.50	1.54	0	0.288	0.298
33	21.50	1.53	0	0.684	0.217
33.5	21.49	1.55	0	0.573	0.237
34	21.49	1.54	0	0.776	0.2
34.5	21.49	1.54	0	0.095	0.374
35	21.48	1.53	0	0.080	0.384
35.5	21.47	1.53	0	0.414	0.268
36	21.46	1.53	1	0.029	0.44
36.5	21.45	1.53	0	0.428	0.265
37	21.43	1.51	0	0.667	0.22
37.5	21.41	1.51	0	0.311	0.292
38	21.40	1.51	0	0.183	0.331
38.5	21.38	1.50	0	0.263	0.305
39	21.37	1.50	0	0.896	0.174
39.5	21.36	1.50	0	0.904	0.172
40	21.35	1.51	0	0.291	0.297
40.5	21.33	1.50	0	0.463	0.258
41	21.32	1.49	0	0.925	0.166
41.5	21.31	1.49	0	0.217	0.319
42	21.30	1.49	0	0.307	0.293
42.5	21.29	1.48	0	0.191	0.328
43	21.29	1.49	0	0.373	0.277
43.5	21.28	1.47	0	0.900	0.173
44	21.27	1.47	0	0.535	0.244



44.5	21.27	1.49	0	0.183	0.331
45	21.26	1.48	0	0.141	0.349
45.5	21.25	1.47	0	0.524	0.246
46	21.25	1.48	0	0.096	0.373
46.5	21.24	1.48	0	0.765	0.202
47	21.24	1.48	0	0.322	0.289
47.5	21.23	1.47	0	0.971	0.148
48	21.23	1.48	0	0.982	0.141
48.5	21.22	1.48	1	0.031	0.438
49	21.22	1.48	0	0.087	0.379
49.5	21.22	1.47	0	0.931	0.164

Tabela 7.3: Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a laje com Rácio = 0.50

Laje com Rácio = 0.50					
Nível de Corrosão	Momento Resistente		Teste K-S		
	Média	Desvio Padrão	H	P	KS
0	58.74	6.37	0	0.090	0.377
0.5	58.46	6.33	0	0.760	0.203
1	58.18	6.30	0	0.130	0.354
1.5	57.90	6.27	0	0.744	0.206
2	54.50	5.91	0	0.611	0.23
2.5	51.28	5.58	0	0.493	0.252
3	48.25	5.24	0	0.090	0.377
3.5	45.38	4.92	0	0.595	0.233
4	42.68	4.62	0	0.840	0.187
4.5	40.15	4.36	0	0.739	0.207
5	37.74	4.07	0	0.067	0.395
5.5	35.48	3.84	0	0.781	0.199
6	33.36	3.61	0	0.733	0.208
6.5	31.35	3.41	0	0.904	0.172
7	29.47	3.19	0	0.956	0.155
7.5	27.70	2.99	0	0.907	0.171
8	26.06	2.76	0	0.634	0.226

8.5	24.57	2.51	0	0.896	0.174
9	23.36	2.17	0	0.791	0.197
9.5	22.51	1.87	0	0.971	0.148
10	22.05	1.68	0	0.888	0.176
10.5	21.85	1.64	0	0.907	0.171
11	21.78	1.61	0	0.791	0.197
11.5	21.77	1.62	0	0.673	0.219
12	21.77	1.61	0	0.535	0.244
12.5	21.76	1.60	0	0.826	0.19
13	21.76	1.60	0	0.473	0.256
13.5	21.76	1.62	0	0.063	0.398
14	21.75	1.60	0	0.969	0.149
14.5	21.75	1.60	0	0.826	0.19
15	21.75	1.62	0	0.382	0.275
15.5	21.75	1.61	0	0.760	0.203
16	21.74	1.62	0	0.739	0.207
16.5	21.74	1.61	0	0.214	0.32
17	21.74	1.61	0	0.158	0.341
17.5	21.73	1.61	0	0.540	0.243
18	21.73	1.59	0	0.343	0.284
18.5	21.72	1.60	0	0.291	0.297
19	21.72	1.59	0	0.684	0.217
19.5	21.72	1.59	0	0.266	0.304
20	21.71	1.60	0	0.183	0.331
20.5	21.71	1.61	0	0.928	0.165
21	21.71	1.60	0	0.314	0.291
21.5	21.70	1.59	0	0.557	0.24
22	21.70	1.60	0	0.288	0.298
22.5	21.70	1.60	0	0.802	0.195
23	21.70	1.60	1	0.029	0.441
23.5	21.69	1.59	0	0.171	0.336
24	21.69	1.60	0	0.791	0.197
24.5	21.69	1.59	0	0.826	0.19
25	21.68	1.58	1	0.015	0.473
25.5	21.68	1.58	0	0.711	0.212
26	21.68	1.60	0	0.428	0.265
26.5	21.68	1.59	0	0.347	0.283

27	21.67	1.60	0	0.473	0.256
27.5	21.67	1.59	0	0.749	0.205
28	21.66	1.59	0	0.656	0.222
28.5	21.66	1.59	0	0.453	0.26
29	21.66	1.57	0	0.656	0.222
29.5	21.65	1.58	0	0.124	0.357
30	21.65	1.57	0	0.931	0.164
30.5	21.65	1.57	0	0.448	0.261
31	21.64	1.58	0	0.831	0.189
31.5	21.64	1.59	1	0.045	0.417
32	21.64	1.58	0	0.524	0.246
32.5	21.63	1.57	0	0.765	0.202
33	21.63	1.58	0	0.335	0.286
33.5	21.63	1.58	0	0.288	0.298
34	21.63	1.58	0	0.700	0.214
34.5	21.62	1.57	0	0.904	0.172
35	21.61	1.57	0	0.386	0.274
35.5	21.60	1.56	0	0.845	0.186
36	21.58	1.55	0	0.760	0.203
36.5	21.56	1.54	0	0.645	0.224
37	21.54	1.56	0	0.488	0.253
37.5	21.52	1.52	0	0.438	0.263
38	21.50	1.53	0	0.391	0.273
38.5	21.48	1.54	0	0.395	0.272
39	21.46	1.50	0	0.606	0.231
39.5	21.44	1.51	0	0.373	0.277
40	21.42	1.53	0	0.904	0.172
40.5	21.41	1.51	0	0.061	0.4
41	21.39	1.52	0	0.488	0.253
41.5	21.38	1.50	0	0.880	0.178
42	21.36	1.51	0	0.087	0.379
42.5	21.35	1.50	0	0.473	0.256
43	21.34	1.48	0	0.226	0.316
43.5	21.33	1.49	0	0.233	0.314
44	21.32	1.48	0	0.948	0.158
44.5	21.31	1.48	0	0.259	0.306
45	21.30	1.49	0	0.611	0.23

45.5	21.29	1.50	0	0.733	0.208
46	21.28	1.49	0	0.918	0.168
46.5	21.27	1.47	0	0.438	0.263
47	21.27	1.48	0	0.473	0.256
47.5	21.26	1.48	0	0.498	0.251
48	21.25	1.48	0	0.291	0.297
48.5	21.25	1.48	0	0.051	0.41
49	21.24	1.48	0	0.551	0.241
49.5	21.24	1.47	0	0.958	0.154

Tabela 7.4: Distribuição probabilística do momento resistente e respectivo K-S teste para a viga

Viga					
Nível de Corrosão	Momento Resistente		Teste K-S		
	Média	Desvio Padrão	H	P	KS
0	94.84	5.90	0	0.744	0.206
0.5	94.40	5.86	0	0.717	0.211
1	93.95	5.83	0	0.200	0.325
1.5	93.50	5.81	0	0.807	0.194
2	88.04	5.48	0	0.124	0.357
2.5	82.89	5.17	0	0.802	0.195
3	78.02	4.86	0	0.656	0.222
3.5	73.44	4.58	0	0.667	0.220
4	69.11	4.31	1	0.021	0.457
4.5	65.04	4.06	1	0.018	0.464
5	61.21	3.82	0	0.156	0.342
5.5	57.60	3.60	0	0.595	0.233
6	54.20	3.38	0	0.840	0.187
6.5	51.00	3.18	0	0.318	0.290
7	47.99	2.98	1	0.001	0.598
7.5	45.16	2.81	0	0.979	0.143
8	42.50	2.64	0	0.684	0.217
8.5	39.99	2.48	0	0.673	0.219
9	37.64	2.33	0	0.888	0.176
9.5	35.43	2.19	0	0.503	0.250

10	33.34	2.06	0	0.661	0.221
10.5	31.38	1.95	0	0.106	0.367
11	29.52	1.84	0	0.867	0.181
11.5	27.79	1.67	0	0.884	0.177
12	26.31	1.39	0	0.242	0.311
12.5	25.26	1.10	0	0.120	0.359
13	24.72	1.02	1	0.045	0.417
13.5	24.55	1.06	0	0.925	0.166
14	24.49	1.08	0	0.695	0.215
14.5	24.47	1.08	0	0.291	0.297
15	24.45	1.09	0	0.980	0.142
15.5	24.43	1.08	0	0.876	0.179
16	24.41	1.08	0	0.239	0.312
16.5	24.39	1.08	0	0.377	0.276
17	24.37	1.09	0	0.546	0.242
17.5	24.35	1.09	1	0.030	0.439
18	24.33	1.09	0	0.331	0.287
18.5	24.31	1.10	0	0.273	0.302
19	24.29	1.10	0	0.322	0.289
19.5	24.28	1.11	0	0.307	0.293
20	24.26	1.11	0	0.314	0.291
20.5	24.24	1.11	0	0.650	0.223
21	24.23	1.12	0	0.760	0.203
21.5	24.21	1.12	0	0.728	0.209
22	24.20	1.13	0	0.623	0.228
22.5	24.18	1.13	0	0.623	0.228
23	24.17	1.14	0	0.684	0.217
23.5	24.16	1.14	0	0.424	0.266
24	24.14	1.14	0	0.791	0.197
24.5	24.13	1.15	0	0.749	0.205
25	24.12	1.15	0	0.428	0.265
25.5	24.11	1.15	0	0.546	0.242
26	24.10	1.15	0	0.623	0.228
26.5	24.09	1.16	0	0.503	0.250
27	24.07	1.16	0	0.395	0.272
27.5	24.06	1.16	0	0.695	0.215
28	24.05	1.16	0	0.443	0.262

28.5	24.04	1.16	0	0.433	0.264
29	24.01	1.16	0	0.546	0.242
29.5	23.97	1.16	0	0.684	0.217
30	23.89	1.16	0	0.802	0.195
30.5	23.81	1.16	0	0.080	0.384
31	23.73	1.16	0	0.524	0.246
31.5	23.66	1.16	0	0.230	0.315
32	23.59	1.16	0	0.863	0.182
32.5	23.52	1.16	0	0.369	0.278
33	23.46	1.16	0	0.850	0.185
33.5	23.40	1.16	0	0.867	0.181
34	23.35	1.16	0	0.414	0.268
34.5	23.30	1.16	0	0.428	0.265
35	23.25	1.16	0	0.876	0.179
35.5	23.20	1.16	0	0.106	0.367
36	23.16	1.16	0	0.921	0.167
36.5	23.12	1.16	0	0.600	0.232
37	23.09	1.16	0	0.173	0.335
37.5	23.05	1.16	0	0.191	0.328
38	23.02	1.16	0	0.152	0.344
38.5	22.99	1.16	0	0.650	0.223
39	22.96	1.16	0	0.639	0.225
39.5	22.93	1.16	0	0.519	0.247
40	22.91	1.16	0	0.840	0.187
40.5	22.88	1.16	0	0.711	0.212
41	22.86	1.16	0	0.535	0.244
41.5	22.84	1.15	0	0.369	0.278
42	22.82	1.16	0	0.090	0.377
42.5	22.81	1.16	0	0.557	0.240
43	22.79	1.16	0	0.937	0.162
43.5	22.77	1.16	0	0.197	0.326
44	22.76	1.15	0	0.812	0.193
44.5	22.75	1.16	1	0.044	0.418
45	22.73	1.16	0	0.524	0.246
45.5	22.72	1.16	0	0.191	0.328
46	22.71	1.16	0	0.120	0.359
46.5	22.70	1.16	0	0.230	0.315

47	22.69	1.15	0	0.540	0.243
47.5	22.68	1.16	0	0.509	0.249
48	22.67	1.16	0	0.943	0.160
48.5	22.66	1.15	0	0.058	0.403
49	22.65	1.16	0	0.684	0.217
49.5	22.65	1.16	0	0.326	0.288
50	22.64	1.16	0	0.419	0.267
50.5	22.64	1.16	0	0.540	0.243
51	22.63	1.16	0	0.915	0.169
51.5	22.62	1.16	0	0.483	0.254
52	22.62	1.16	1	0.021	0.456
52.5	22.61	1.16	0	0.988	0.136
53	22.61	1.16	0	0.589	0.234
53.5	22.61	1.16	0	0.246	0.310
54	22.60	1.15	0	0.661	0.221
54.5	22.60	1.16	0	0.557	0.240
55	22.60	1.16	0	0.386	0.274
55.5	22.59	1.16	0	0.134	0.352
56	22.59	1.16	0	0.103	0.369
56.5	22.59	1.15	1	0.012	0.483
57	22.58	1.16	0	0.673	0.219
57.5	22.58	1.16	0	0.786	0.198
58	22.58	1.16	1	0.033	0.434
58.5	22.58	1.16	0	0.700	0.214
59	22.58	1.16	0	0.178	0.333
59.5	22.57	1.15	0	0.722	0.210
60	22.57	1.16	0	0.230	0.315
60.5	22.57	1.16	1	0.002	0.568
61	22.57	1.15	0	0.259	0.306
61.5	22.57	1.16	0	0.589	0.234
62	22.57	1.16	0	0.252	0.308
62.5	22.56	1.16	0	0.331	0.287
63	22.56	1.16	0	0.369	0.278
63.5	22.56	1.16	0	0.896	0.174
64	22.56	1.16	0	0.717	0.211
64.5	22.56	1.16	0	0.145	0.347
65	22.56	1.16	0	0.360	0.280

65.5	22.56	1.16	0	0.291	0.297
66	22.56	1.16	0	0.535	0.244
66.5	22.56	1.15	0	0.322	0.289
67	22.56	1.16	0	0.884	0.177
75	22.55	1.16	0	0.453	0.260
78	22.55	1.16	0	0.816	0.192
81	22.55	1.16	0	0.880	0.178
84	22.55	1.16	0	0.931	0.164
87	22.55	1.16	0	0.409	0.269
90	22.55	1.16	0	0.695	0.215
93	22.55	1.16	0	0.976	0.145
96	22.55	1.16	0	0.078	0.386
99	22.55	1.16	0	0.078	0.386

---